Informes Técnicos Ciemat

1181

Noviembre, 2009

Cálculo Numérico del Transporte mediante la Ecuación Cinética de Deriva para Plasmas en Geometría Magnética Toroidal: Convergencia y Comprobaciones

J.M. Reynolds
D. López-Bruna

Laboratorío Nacional de Fusión

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Información y Documentación, Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas, Ciudad Universitaria, 28040-MADRID, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesauro del DOE para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. La catalogación se ha hecho utilizando el documento DOE/TIC-4602 (Rev. 1) Descriptive Cataloguing On-Line, y la clasificación de acuerdo con el documento DOE/TIC.4584-R7 Subject Categories and Scope publicados por el Office of Scientific and Technical Information del Departamento de Energía de los Estados Unidos.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Catálogo general de publicaciones oficiales
http://www.060.es

Depósito Legal: M -14226-1995
ISSN: 1135 - 9420
NIPO: 471-09-058-7

Editorial CIEMAT

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES

S70
NUMERICAL DATA; CALCULATION METHODS; TOROIDAL CONFIGURATION; KINETIC EQUATIONS; PLASMA; TRANSPORT; GEOMETRY; IONS; ELECTRONS

Cálculo Numérico del Transporte mediante la Ecuación Cinética de Deriva para Plasmas en Geometría Magnética Toroidal: Convergencia y Comprobaciones

Reynolds, J. M; López-Bruna, D.
43 pp. 18 fig. 18 refs.

Resumen:

Éste es el tercero de una serie de informes [Informes Técnicos Ciemat 1165 y 1172] sobre el desarrollo de un nuevo código numérico para resolver la ecuación cinética del centro guía de iones y electrones en plamas toroidales. Ahora se preparan dos mallas de cálculo correspondientes a tokamak axisimétrico y se expande la ecuación cinética para identificar los términos típicos de la teoría neoclásica --el primer orden en una expansión por radio de Larmor-- y reducir ahí los cálculos. Usando perfiles modelo de densidad y temperatura en el plasma, se hacen pruebas de convergencia en función de las mallas de cálculo y de las expansiones de la función de distribución; y se compara con los resultados teóricos [Hinton y Hazeltine, Rev. Mod. Phys. (1976)].

Numerical Calculation of Transport Based on the Drift-Kinetic Equation for Plasmas in General Toroidal Magnetic Geometry: Convergence and Testing

Reynolds, J. M; López-Bruna, D.
43 pp. 18 fig. 18 refs.

Abstract:

This report is the third of a series [Informes Técnicos Ciemat 1165 y 1172] devoted to the development of a new numerical code to solve the guiding center equation for electrons and ions in toroidal plamas. Two calculation meshes corresponding to axisymetric tokamaks are now prepared and the kinetic equation is expanded so the standard terms of neoclassical theory --first order terms in the Larmor radius expansion-- can be identified, restricting the calculations correspondingly.
Using model density and temperature profiles for the plasma, several convergence test are performed depending on the calculation meshes and the expansions of the distribution function; then the results are compared with the theory [Hinton and Hazeltine, Rev. Mod. Phys. (1976)].

Cálculo numérico del transporte mediante la ecuación cinética de deriva para plasmas en geometría magnética toroidal: convergencia y comprobaciones

J. M. Reynolds, D. López-Bruna

3 de noviembre de 2009

Resumen

Éste es el tercero de una serie de informes [Informes Técnicos Ciemat 1165 y 1172] sobre el desarrollo de un nuevo código numérico para resolver la ecuación cinética del centro guía de iones y electrones en plamas toroidales. Ahora se preparan dos mallas de cálculo correspondientes a tokamak axisimétrico y se expande la ecuación cinética para identificar los términos típicos de la teoría neoclásica –el primer orden en una expansión por radio de Larmor– y reducir ahí los cálculos. Usando perfiles modelo de densidad y temperatura en el plasma, se hacen pruebas de convergencia en función de las mallas de cálculo y de las expansiones de la función de distribución; y se compara con los resultados teóricos [Hinton y Hazeltine, Rev. Mod. Phys. (1976)].

1. Introducción

En informes anteriores hemos introducido el fundamento teórico [1] y los aspectos numéricos [2] de un código de transporte basado en la ecuación cinética de deriva. Procede ahora presentar los primeros estudios de convergencia y hacer comparaciones con la teoría. Lo último es difícil y poco concluyente si no se acude a los supuestos más sencillos. En el caso del código que nos ocupa, concebido para estudiar plasmas confinados magnéticamente en geometría toroidal general, tales supuestos corresponden al transporte neoclásico en campos axisimétricos de tokamak con sección transversal circular. Como corresponde a un código numérico de gran complejidad, sus resultados

habrán de ser revisados críticamente de manera continuada. Con este informe establecemos la base de posteriores comprobaciones.

En lo que sigue empezaremos describiendo las condiciones de las simulaciones numéricas (sección 2) y haremos explícitos los términos de comparación con la teoría (sección 3), para pasar a estudiar la convergencia en función de la precisión espacial y en espacio de velocidades del código (sección 4). Acabaremos con el objetivo propuesto, comparar resultados numéricos y teóricos (sección 5) en las condiciones previamente descritas, aparte de con una breve conclusión.

2. Condiciones de trabajo

2.1. Geometrías magnéticas

Como se apuntaba en la Introducción, para poder efectuar las primeras comparaciones es fundamental reducir el estudio a una geometría magnética sencilla. La parte de este informe dedicada a la comparación con los modelos teóricos de transporte colisional se basa en dos modelos de tokamak con simetría axial que denominamos simplemente Tokamak-I y Tokamak-II (abreviados T-I y T-II respectivamente), cuya diferencia esencial es que T-II es de sección circular. La mayoría de las simulaciones se efectuarán con T-II por su sencillez, si bien T-I se comporta de forma muy parecida.

En los tokamak, el confinamiento se debe al campo magnético generado externamente por bobinas junto al campo asociado a la corriente del propio plasma. Este último es necesario para que haya una transformada rotacional[1], sin la que el confinamiento es imposible en geometría toroidal. Gran parte de dicha corriente procede de la fuerza electromotriz inducida desde el exterior mediante variación del flujo magnético, si bien la llamada corriente de *bootstrap* [3], generada por el propio plasma, puede proveer un porcentaje considerable de la corriente necesaria [4]. El tokamak opera en torno a un equilibrio magnetohidrodinámico (MHD) en el que los campos magnéticos externos e internos son consistentes con la presión del plasma. En las condiciones relevantes para este trabajo podemos usar las ecuaciones de la MHD ideal con flujos de plasma nulos: $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, de manera que la fuerza termodinámica debida al gradiente de la presión, p, y la fuerza de Lorentz expresada colectivamente a través de la densidad de corriente del plasma, $\mathbf{J}$, y el campo magnético $\mathbf{B}$, deben estar equilibradas. Aquí vemos que la

[1] En la literatura sobre tokamak es común usar su inversa, el llamado *factor de seguridad*, q, una función dependiente de la superficie de flujo que relaciona la intensidad promedio de los campos toroidal y poloidal en ella. Lo usaremos más adelante.

propia presión puede servir de coordenada "radial", pues normalmente disminuye monótonamente desde el centro del plasma y el campo magnético es perpendicular a ∇p. Por este motivo, pueden de igual manera usarse otras coordenadas radiales ψ tales que $p = p(\psi)$. Las otras dos ecuaciones en las que se basa la MHD ideal son $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (puede consultarse el artículo recopilatorio [5]).

Considerando un radio cilíndrico R referido al eje mayor del toro, es sabido que el equilibrio MHD es solución a la denominada *ecuación de Grad-Shafranov* (Ec. 7.10 en [6] y [7]),

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = -\mu_0 R^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\psi} - I \frac{dI}{\mathrm{d}\psi}, \tag{1}$$

donde $I = I(\psi)$ es una función relacionada con la corriente poloidal del plasma, ψ es la función poloidal (equivalente al flujo magnético poloidal, ψ_{pol}, dividido por 2π y que más adelante se usará como coordenada pseudorradial) y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

Es sabido que la Ec. 1 presenta algunos casos límite sencillos, por ejemplo cuando $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\psi$ y $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\psi$ son proporcionales a ψ (si la presión del plasma es suficientemente baja). Nos basaremos en esto para construir geometrías magnéticas consistentes con un equilibrio MHD, como se hace a menudo en la teoría del transporte neoclásico. Obsérvese que el operador del miembro izquierdo de la Ec. 1 involucra derivadas con respecto a la coordenada cilíndrica z,

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

La solución a la ecuación de Grad–Shafranov es la función $\psi(R, z)$ mediante la cual puede construirse el campo magnético axisimétrico $\mathbf{B}$ compatible con la condición de equilibrio $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ y, como vemos (Ec. 1), el equilibrio bidimensional (axisimétrico) depende de los perfiles de presión y corriente poloidal –condiciones de contorno aparte–, que pueden en principio tomarse como grados de libertad independientes.

2.1.1. Tokamak I (T-I)

Si en el volumen del plasma $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\psi$ y $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\psi$ son constantes, se tiene uno de los pocos casos en los que la Ec. 1 puede resolverse analíticamente. Con estos supuestos, la función poloidal solución es (Ec. 7.11 en [6]),

$$\psi = \frac{\psi_{\mathrm{pol}}}{2\pi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \nabla \theta \cdot \mathbf{B} \mathrm{d}V = \frac{\psi_0}{R_0^4} \left[\left(R^2 - R_0^2 \right)^2 + \frac{z^2}{E^2} \left(R^2 - R_x^2 \right) \right.$$
$$\left. - \tau R_0^2 \left(R^2 \ln \frac{R^2}{R_0^2} - \left(R^2 - R_0^2 \right) - \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{2R_0^2} \right) \right], \tag{2}$$

donde R_0 es el radio mayor del plasma y ψ_0 es una constante que define la magnitud de ψ. También hemos usado la relación

$$\psi_{\text{pol}} = \int_{\text{sup. poloidal}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{volumen}} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta \mathrm{d}V.$$

Las constantes R_x, E y τ caracterizan las superficies de flujo. En concreto para este ejemplo vamos a tomar $\tau = 0$, es decir, un plasma cuyas secciones toroidales para las superficies magnéticas tienden a ser elipses concéntricas conforme $\psi \to 0$ (cuando $E = 1/2$ estas secciones tienden a circulares). Tomaremos también $R_x = 0$, pues esta constante viene a ser la posición radial donde empieza la región de superficies anidadas. La función poloidal se puede expresar entonces como

$$\psi = \frac{\psi_0}{R_0^4} \left[\left(R^2 - R_0^2\right)^2 + \frac{z^2}{E^2} R^2 \right]. \tag{3}$$

En la figura 1 vemos los contornos de ψ que corresponden a esta ecuación usando parámetros que encontraremos luego.

Cerca del eje magnético ($R \to R_0$ y $z \to 0$), la Ec. 3 se puede aproximar por

$$\psi = 4\frac{\psi_0}{R_0^2} \left((R - R_0)^2 + \frac{z^2}{4E^2} \right), \tag{4}$$

donde se ve más claramente que las secciones en el plano toroidal son elipses cuya relación de ejes depende de E. Si, además, $E = 1/2$, la función de flujo poloidal puede expresarse sencillamente en función del radio menor del toroide, $\rho = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2}$:

$$\psi = 4\frac{\psi_0}{R_0^2} \rho^2, \tag{5}$$

de manera que el radio geométrico ρ sirve también como coordenada para las superficies magnéticas. La condición de "proximidad al eje magnético" puede interpretarse como una condición de alta relación de aspecto, $A = R_0/\rho \gg 1$.

Una vez obtenida una geometría para las superficies de flujo, o funciones $\psi(R, z)$, vamos a construir el campo magnético que usaremos en los cálculos. En términos generales, un campo magnético axisimétrico puede expresarse según sus componentes a lo largo de la dirección de simetría (tal que $\partial_\varphi = 0$); y perpendicular a ella, pero a su vez perpendicular a las superficies de flujo. Por ejemplo, puede demostrarse fácilmente que es válida la relación (Ec. 7.2 en [6]),

$$\mathbf{B} = I(\psi)\nabla\varphi + \nabla\varphi \times \nabla\psi = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P, \tag{6}$$

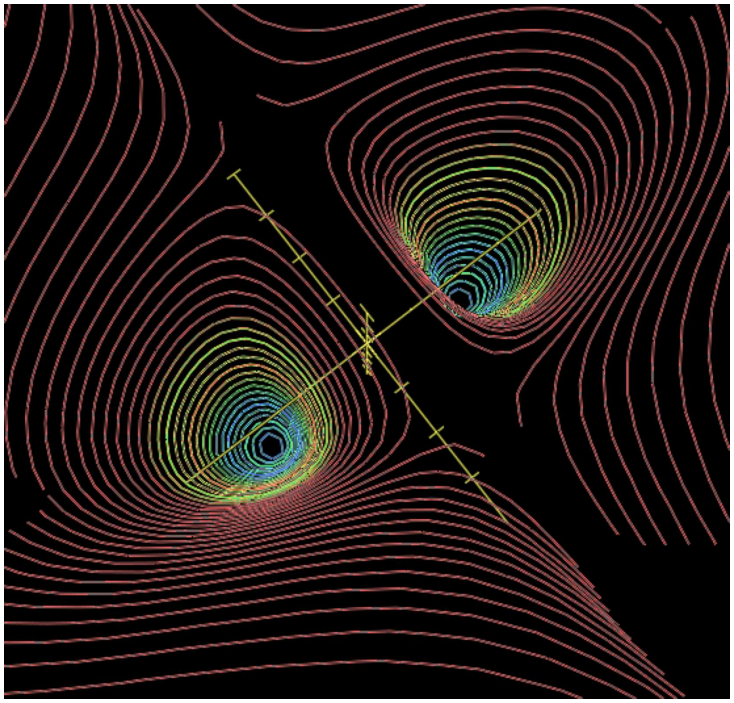

Figura 1: Solución analítica Ec. 3 a la ecuación de Grad-Shafranov. Se muestran los ejes de las coordenadas R y z en perspectiva, con ψ en la dimensión vertical. $R_0 = 2{,}8$, $\psi_0 = 0{,}525$, $E = 1/2$.

donde el primer sumando es la componente toroidal (paralela al vector unitario toroidal $R\nabla\varphi$) y el segundo la poloidal. Como vemos, en esta formulación la componente toroidal $|\mathbf{B}_T| = B_T = I/R$ depende de la corriente poloidal que, en la geometría magnética que estamos usando, puede ser constante y el campo toroidal varía $\sim 1/R$.

Calculemos explícitamente las componentes del campo. En coordenadas cartesianas, se tiene:

$$\nabla\varphi = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el ángulo está definido en sentido contrario al habitual en coordenadas cilíndricas, lo que se hace para que la base del sistema de *coordenadas toroidales*, $\{\nabla\psi, \nabla\theta, \nabla\varphi\}$, forme un triedro a derechas[2] en cada punto del plasma. Con ello, y calculando el gradiente de ψ dado por la Ec. 3, el campo magnético Ec. 6 tiene por componentes

$$\mathbf{B}_T = I\nabla\varphi = \frac{I}{R^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B}_P = \nabla\varphi \times \nabla\psi = \frac{2\psi_0}{R_0^4}\begin{pmatrix} -xz/E^2 \\ -yz/E^2 \\ z^2/E^2 + 2(R^2 - R_0^2) \end{pmatrix}.$$

Particularizando al caso $E = 1/2$, tenemos el campo poloidal

$$\mathbf{B}_P = \frac{8\psi_0}{R_0^4}\begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 + (R^2 - R_0^2)/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Sólo queda adoptar unas constantes R_0, ψ_0 e I. En el caso de R_0, y puesto que haremos comparaciones con el trabajo [8], adoptamos ya $R_0 = 2{,}8$ m considerando que los plasmas tienen una relación de aspecto $A = 3$. En cuanto a ψ_0 e I, nos basaremos en definir el valor de parámetros típicos, como el propio radio mayor R_0 y el factor de seguridad q. Nuevamente, compararemos con la Ref. [8] tomando $q = 2$. Puesto que basta con tener valores razonablemente consistentes, vamos a basarnos en las relaciones que se encuentran en el límite de secciones circulares de las superficies de flujo.

[2] Aquí no haremos uso explícito del llamado *ángulo poloidal* θ, pero el convenio de signo para definir φ responde a, como se ha dicho, tener el triedro orientado convencionalmente. No siempre se hace así (véase [5], p. 828).

Recordemos que el flujo toroidal se define como

$$\phi_{\text{tor}} = \int_{\text{sup.toroidal}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{volumen}} \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}V.$$

Siguiendo la notación dada en [9] definimos la función de flujo toroidal como $\phi = \phi_{\text{tor}}$, donde no se divide por 2π como hemos hecho con el flujo poloidal. Esta magnitud, en el límite de alta relación de aspecto, permite definir una coordenada radial ρ efectiva equivalente al radio menor de un toro de sección circular (Ec. 5.35 en [9]),

$$\phi = B_{T0}\pi\rho^2, \tag{9}$$

donde B_{T0} es un valor representativo del campo magnetico toroidal, normalmente el valor en el eje magnético. En nuestro caso

$$B_{T0} = \frac{I}{R_0} \tag{10}$$

con I constante.

Definamos también el campo magnético poloidal efectivo asociado a cada superficie magnética (Ec. 5.36 en [9]),

$$B_{P0}(\rho) = \frac{1}{R_0}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \tag{11}$$

que, calculado a partir de la Ec. 5, resulta

$$B_{P0}(\rho) = \frac{8\psi_0}{R_0^3}\rho. \tag{12}$$

Ahora, el factor de seguridad viene dado por (Ec. 2.50 en [9])

$$q(\rho) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}, \tag{13}$$

que con las definiciones adoptadas para las funciones de flujo ψ (Ec. 5) y ϕ (Ec. 9) resulta constante. Mediante la Ec. 11 obtenemos

$$B_{P0}(\rho) = \frac{1}{R_0}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \frac{B_{T0}}{qR_0}\rho, \tag{14}$$

que coincide con la conocida expresión cilíndrica para el factor de seguridad, $q = (\rho/R_0)(B_{T0}/B_{P0})$.

En suma, hemos obtenido un valor para ψ_0 en función del factor de seguridad y el radio mayor, quedando caracterizados tanto el campo magnético

como los flujos. Recordando que particularmente tomaremos $q = 2$, $I = 3$ y $R_0 = 2{,}8$ m, tenemos:

-A partir de (10), $B_{T0} = 1{,}0714$ T.

-A partir de (14), $B_{P0} = 0{,}1913\rho$ T.

-A partir de (12), $\psi_0 = 0{,}5250$ Wb.

Con esto se tienen todos los parámetros necesarios para caracterizar tanto la coordenada radial ρ y los flujos φ y ψ como $\mathbf{B}$ y sus derivadas. Insistimos en que el objetivo de este apartado es definir una geometría magnética semejante a las que suelen usarse para hacer aproximaciones neoclásicas al transporte en los tokamak.

2.1.2. Tokamak II (T-II)

En este caso se va a usar un campo simplificado pero con las mismas propiedades que el extraído de un equilibrio MHD axisimétrico. De hecho, las ecuaciones que siguen son el caso anterior en el límite de gran relación de aspecto, en el cual $R \approx R_0$; es decir, las que resultan de considerar que la función de flujo poloidal es la Ec. 5, $\psi = 4\psi_0\rho^2/R_0^2$. Volviendo a la expresión general Ec. 6 y calculando los gradientes con esta función poloidal simplificada, resulta

$$\mathbf{B}_P = 8\frac{\psi_0}{R_0^2}\begin{pmatrix} zx/R^2 \\ zy/R^2 \\ -(R-R_0)/R \end{pmatrix},$$

cuyo módulo es

$$B_P = \frac{8\psi_0}{R_0^2}\frac{\rho}{R} \tag{15}$$

de acuerdo con el campo efectivo Ec. 11. Este campo poloidal puede expresarse (Ec. 5.37 en [9]) como

$$\mathbf{B}_P = \hat{u}_\theta \frac{R_0}{R} B_{P0} \tag{16}$$

siendo $\hat{u}_\theta$ el vector unitario en la dirección poloidal (es decir, dentro de las superficies magnéticas y ortogonal a la coordenada toroidal) y

$$B_{P0}(\rho) = \frac{1}{R_0}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = 8\frac{\psi_0}{R_0^3}\rho.$$

El campo toroidal es idéntico al anterior (Ec. 7):

$$\mathbf{B}_T = I\nabla\varphi = \frac{I}{R^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se pueden obtener analíticamente las cantidades

$$B = |\mathbf{B}| = \frac{1}{R}\sqrt{I^2 + K^2((R - R_0)^2 + Z^2)}$$

$$\nabla B = \frac{1}{R^4 B}\begin{pmatrix} x(-I^2 + K^2(R_0 R - R_0^2 - Z^2) \\ y(-I^2 + K^2(R_0 R - R_0^2 - Z^2) \\ K^2 Z R^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{K(R_0 + R)}{R^3}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde, para simplificar, sustituimos $K = 8\psi_0/R_0^2$.

En la geometría de T-II tomaremos los mismos parámetros que para el ejemplo T-I: $q = 2$, $I = 3$ y $R_0 = 2{,}8$ m. Pero recordemos que con T-I hemos obtenido las relaciones entre ψ_0, q y R usando precisamente la aproximación de gran relación de aspecto, de manera que las ecuaciones son las mismas y obtenemos igualmente $B_{T0} = 1{,}0714$ T, $B_{P0} = 0{,}1913\rho$ T y $\psi_0 = 0{,}5250$ T/m^2.

2.2. Parámetros de las simulaciones

En las simulaciones que siguen se mostrarán los resultados tras alcanzar un estacionario en el que los perfiles promedio de densidad y de temperaturas iónica y electrónica permanecen fijos. Esto se puede considerar desde otro punto de vista pensando que, en el estacionario alcanzado, actúan las fuentes de partículas y energía necesarias para mantener esos perfiles. Los estados estacionarios se obtienen mediante el algoritmo descrito en la Sección 4 de la Ref. [2], es decir, utilizando como herramienta la evolución temporal. El campo eléctrico radial se considera nulo por simplicidad.

Se van a estudiar varios casos, todos basados en el mismo perfil de densidad

$$n(\rho) = n_0 e^{-\frac{\rho^2}{1{,}86}},$$

con $n_0 = 10^{18}$ m^{-3}. Se ha tomado una densidad pequeña para obtener colisionalidades suficientemente bajas. Éstas se consiguen mediante perfiles de temperatura

$$T(\rho) = T_0 e^{-\frac{\rho^2}{0{,}62}},$$

donde las distintas colisionalidades se obtendrán utilizando $T_0 = 10$, 50, 100, 150 y 200 eV. Aunque 10 eV es una temperatura demasiado baja para un plasma de las densidades elegidas (por debajo de la energía de ionización),

en los estudios de convergencia y comparación aquí realizados esto no es importante. Estos perfiles (normalizados) de densidad y temperatura se representan en la figura 2 frente al radio normalizado.

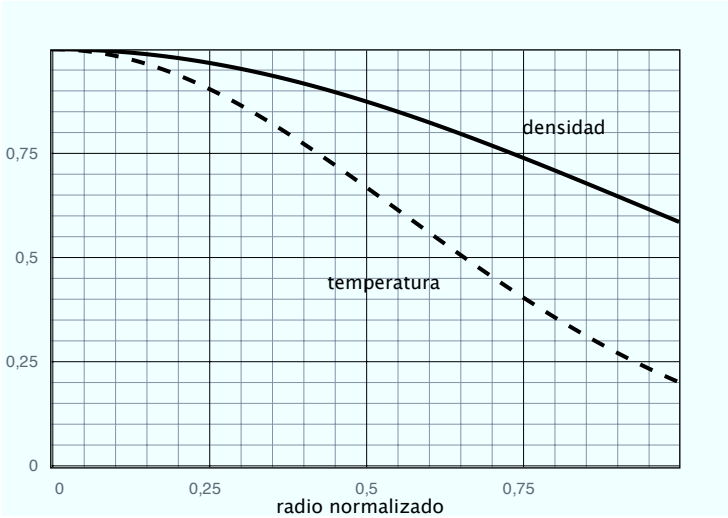

Figura 2: Perfiles normalizados de densidad y temperatura utilizados en las simulaciones.

Como parámetros de las especies del plasma se toman los correspondientes a un plasma de hidrógeno puro: la masa iónica, a menos que se indique lo contrario, es la del protón. En los cálculos se respeta la gran diferencia entre esta masa y la electrónica, que se toma según su valor real como se hace con las cargas. Con todas estas elecciones de parámetros y usando los perfiles de la figura 2, las simulaciones cubren los intervalos de colisionalidad que aparecen en la figura 3. La colisionalidad viene expresada como la inversa del tiempo de colisión entre iones, $\nu_{ii} = 1/\tau_{ii}$. La atípica normalización por el factor $0{,}93/\sqrt{2}v_{thi}$, donde v_{thi} es la velocidad térmica iónica, es necesaria para facilitar la comparación de nuestros resultados con los de la referencia [8], en la que nos basaremos más adelante. Las constantes se deben a las distintas definiciones de la temperatura térmica y a los distintos radios medios utilizados.

2.3. Mallas

La axisimetría de las configuraciones magnéticas simplifica notablemente los cálculos al permitir que la resolución espacial en la coordenada toroidal se reduzca a un solo elemento. No obstante, se ha hecho la comprobación básica

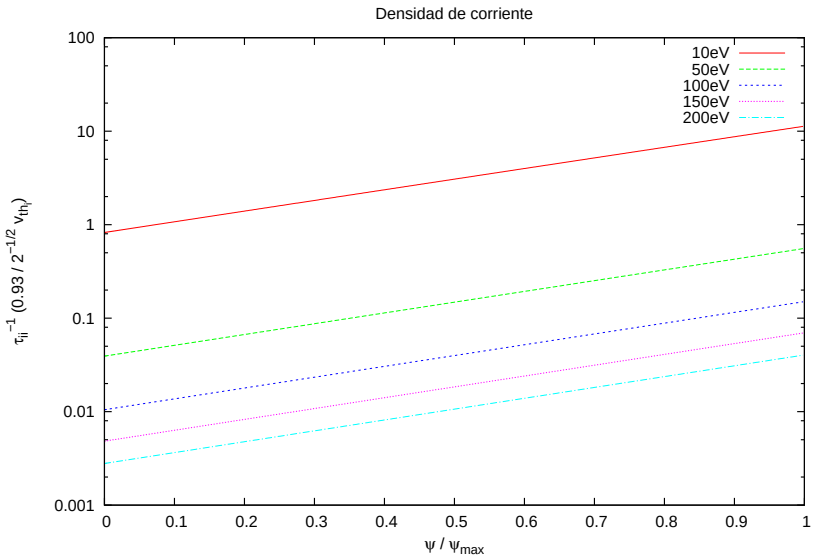

Figura 3: Colisionalidades correspondientes a los diferentes perfiles de temperatura estudiados.

de verificar que el esquema numérico preserva de hecho la axisimetría cuando se cuenta con un número mayor de elementos en la dimensión toroidal. Los resultados que siguen se basan en cálculos realizados en un cuadrante del toro, el cual se describe mediante un único elemento para cada división radial y poloidal. Habida cuenta de este detalle, para hacer pruebas de convergencia con la malla de cálculo en los "dispositivos" T-I y T-II usaremos los siguientes mallados espaciales. En primer lugar, se estudian tres mallas para la geometría T-II (todas ellas van de $\rho = 0$ a $\rho = 1$ m, ver figura 4):

1. La primera (a partir de ahora G1) está compuesta por 6 coronas en la dirección radial y 8 elementos poloidales en cada corona radial.

2. La segunda malla (G2) consta también de 6 coronas en la dirección radial pero 16 elementos poloidales en cada corona radial.

3. La malla G3 consta de 8 coronas y 16 elementos poloidales por corona.

Hemos dispuesto dos mallas adicionales (figura 5) que servirán para hacer cálculos a mayor relación de aspecto. Limitando la coordenada ρ máxima a $\rho = 0{,}7$ m pero con el mismo radio mayor, se tienen casos con relación de aspecto mayor –y, en particular, semejantes a los usados en la Ref. [8]–, más apropiados para hacer comparaciones con la teoría. Entonces definimos:

1. Malla G4 con 6 coronas y 8 elementos por corona.

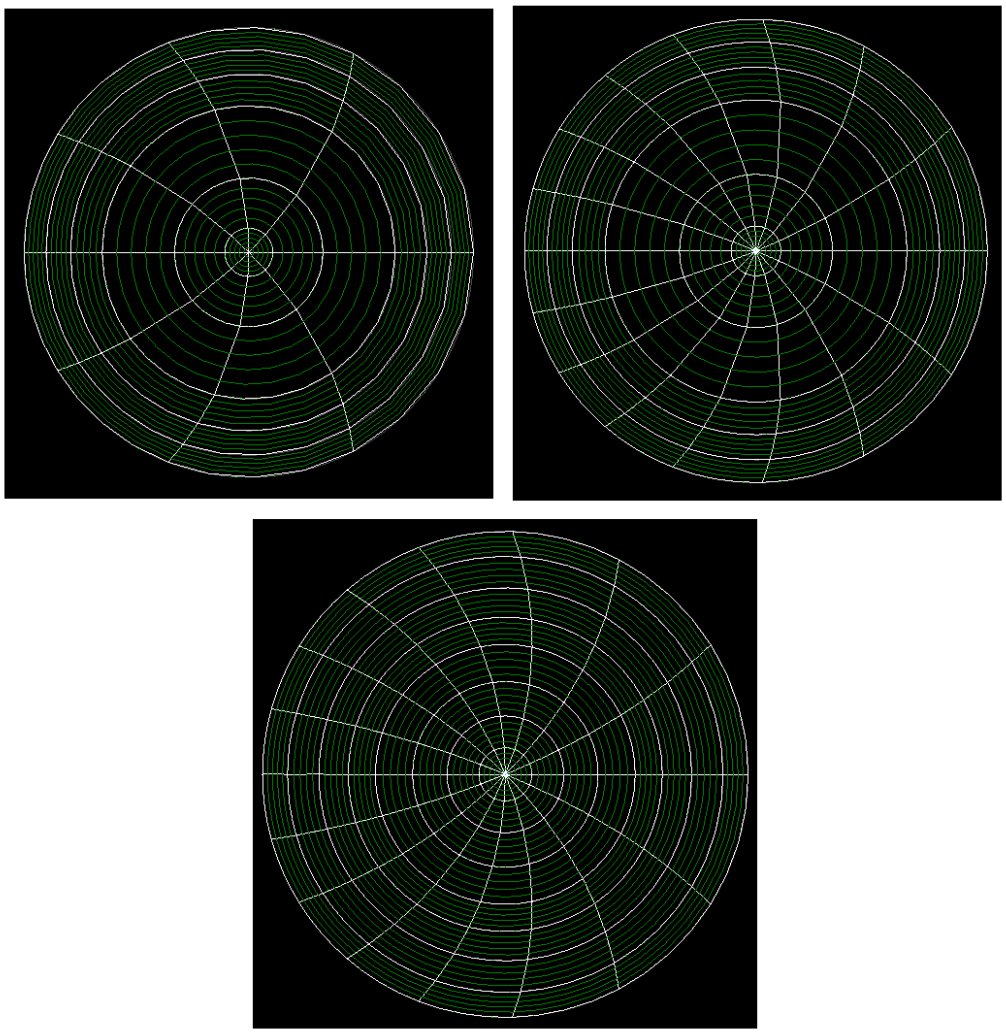

Figura 4: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, sección de las mallas G1, G2 y G3 (geometría T-II hasta $\rho = 1$ m).

2. Malla G5 con 6 coronas y 16 elementos por corona.

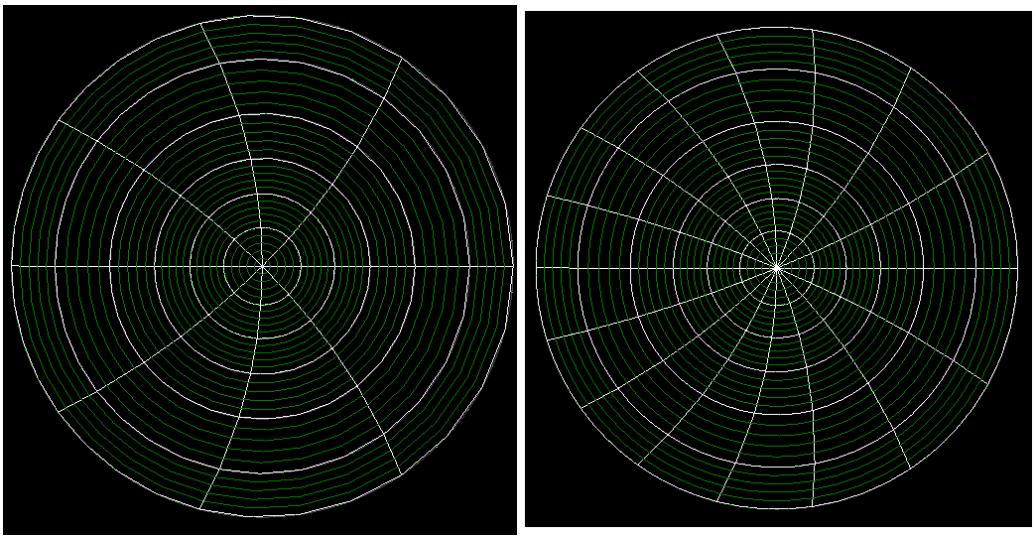

Figura 5: Sección de las mallas G4 (izquierda) y G5 (derecha) en la geometría T-II hasta $\rho = 0{,}7$ m.

Finalmente, para los estudios con el campo más complejo T-I se usará la malla G6 representada en la figura 6. Como vemos, la resolución radial es semejante a la de G4 o G5.

3. Reducción de las ecuaciones a los supuestos de la teoría

En un informe anterior se obtuvieron las ecuaciones dinámicas de las diferentes especies (ver Sec. 2 en la Ref. [1]) que el código de transporte debe resolver. Pero el propósito aquí es realizar comparaciones con modelos teóricos que funcionan en condiciones más restringidas, motivo por el que hemos desarrollado los campos magnéticos y mallas anteriores. Ahora, además, vamos a linealizar las ecuaciones cinéticas para que el código haga cálculos comparables con las aproximaciones típicas de la teoría.

Un aspecto fundamental en la teoría cinética es la solución al estado de equilibrio en torno a la cual se plantean los desarrollos perturbativos. Recordemos que suele contemplarse la circunstancia de *campo magnético fuerte*, por la que el radio de Larmor, ρ_L, de las partículas es pequeño frente a las dimensiones macroscópicas del sistema, L_H. Ya hemos aprovechado esto al usar la ecuación cinética de deriva, así que estamos en circunstancias en las

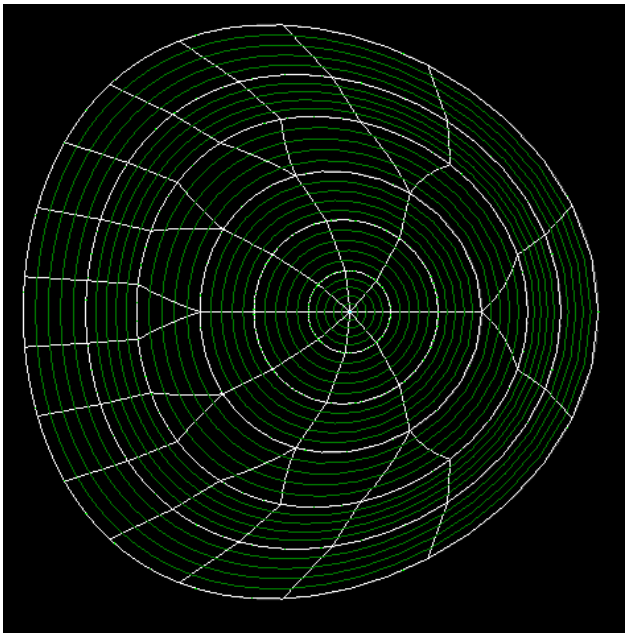

Figura 6: Sección de la malla G6 en la geometría T-I. Corresponde a los mismos parámetros de la figura 1.

que $\epsilon = \rho_L/L_H \ll 1$ o, equivalentemente, $\omega_t/\Omega_L \sim \epsilon \ll 1$, donde la *frecuencia de tránsito* es el cociente entre la velocidad térmica y la longitud característica del sistema, $\omega_t = v_t/L_H = \sqrt{2T/m}/L_H$, mientras que $\Omega_L \sim v_t/\rho_L$ es la frecuencia de Larmor. Ahora, considerando una expansión de la función de distribución para la especie a, f_a, en potencias de ϵ,

$$f_a = \sum_k f_{ka};\ f_{ka} = \mathcal{O}(\epsilon^k),$$

sabemos [9] que el orden cero f_{0a} corresponde a una maxwelliana y que los flujos de orden cero son nulos. En otras palabras: para comparar los flujos de nuestra ecuación cinética con los que se obtienen como mínimo en la teoría, podemos hacer la evolución de la ecuación que corresponde al primer orden, f_1. Como primer paso vamos a extraer "la parte de orden cero" en nuestra formulación de la ecuación cinética para comprobar que se obtiene ciertamente la ecuación cuya solución estacionaria es una maxwelliana.

Recordemos la Ec. 2.12 de la Ref. [1],

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \nabla \left(f_a(\mathbf{x}, \beta, \lambda) \right) + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f_a(\mathbf{x}, \beta, \lambda)}{\partial \beta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f_a(\mathbf{x}, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} = \mathcal{C}_{ab}, \quad (17)$$

donde definimos coordenadas $\beta \doteq v^2/v_t^2$ y $\lambda \doteq v_\parallel/v$ en el espacio de velocidades. La cantidad v_t es una velocidad de normalización cuyo valor es siempre

próximo a la velocidad térmica $\sqrt{2T/m}$, motivo por el que en lo que sigue no haremos distinción entre una y otra. Cuando sea necesario, añadiremos un subíndice para referirnos a la velocidad térmica de una especie dada de partículas.

Las derivas son (Ec. 2.18 de la Ref. [1])

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\nabla B} + v_\parallel \mathbf{b} =$$

$$\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} + \frac{mv_t^2}{2}\frac{\beta\,(1+\lambda^2)}{qB^3}\mathbf{B}\times\nabla B + v_t\sqrt{\beta}\lambda\mathbf{b} \tag{18}$$

y los términos de aceleración son (Ecs. 2.21 y 2.22 de la Ref. [1])

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{2q}{mv_t^2}\mathbf{v}_d\cdot\mathbf{E} = \left[\frac{\beta(1+\lambda^2)}{B^3}\mathbf{B}\times\nabla B + \frac{2q}{mv_t}\beta^{1/2}\lambda\mathbf{b}\right]\cdot\mathbf{E} \tag{19}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{1-\lambda^2}{2\beta\lambda}\mathbf{v}_d\cdot\left(\frac{2q}{mv_t^2}\mathbf{E} - \beta\nabla\ln B\right)$$

$$= \frac{1-\lambda^2}{2}\left[\left(\lambda\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^3} + \frac{2q}{mv_t\beta^{1/2}}\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{E} - v_t\beta^{1/2}\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B\right]. \tag{20}$$

Estos últimos se obtienen suponiendo que el momento magnético

$$\mu = mv_\perp^2/2B \tag{21}$$

es constante. Recordemos que $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

Para cada especie, electrones o iones, podemos evaluar la importancia relativa entre sumandos de la Ec. 17 según ϵ. Por ejemplo, la deriva $|\mathbf{v}_{\nabla B}| \sim (m/2q)(v_t^2/BL_H) \sim v_t^2/L_H\Omega_L \sim \epsilon v_t$. En cuanto a la deriva eléctrica $\mathbf{v}_E$, podemos suponer que el potencial electrostático es $\phi = \sum_{k=0}\phi_k$ siendo $\phi_k \sim \epsilon^k$ y $\phi_0 \sim T/q$ de manera que, en el orden inferior, $|\mathbf{v}_E| \sim E/B \sim \phi_0/L_H B \sim T/eBL_H \sim \omega_t v_t/\Omega_L \sim \epsilon v_t$, como la deriva $\mathbf{v}_{\nabla B}$. Sin embargo, la velocidad paralela es $v_\parallel \sim v_t$, de manera que se trata del término dominante en la convección. En cuanto a las aceleraciones (Ecs. 19 y 20), observamos que ambas son proporcionales a $\mathbf{v}_d$, de manera que un análisis semejante permite sacar los términos dominantes. En la Ec. 19 vemos que sólo puede ser de orden cero el término relacionado con el campo eléctrico paralelo, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{b} = E_\parallel$, en tanto éste tenga la suficiente magnitud,

$$\frac{2q}{mv_t^2}v_\parallel\mathbf{b}\cdot\mathbf{E} = \frac{2q}{mv_t}\beta^{1/2}\lambda E_\parallel;$$

mientras que en la Ec. 20, además, tenemos la contribución de la convección paralela, que hace que las partículas exploren con mucha rapidez las heterogeneidades del campo magnético por la superficies de flujo,

$$(1-\lambda^2)\frac{q}{mv_t\beta^{1/2}}E_\parallel - \frac{1-\lambda^2}{2}\beta^{1/2}v_t\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B.$$

Teniendo en cuenta los términos anteriores y escindiendo el campo paralelo en términos de orden cero y uno, $E_\parallel = E_{\parallel 0} + E_{\parallel 1}$, la ecuación cinética Ec. 17 en orden cero para la especie a debe cumplir:

$$\partial_t f_{0a} + v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla f_{0a} + \left[\frac{2q_a}{mv_{ta}}\beta^{1/2}\lambda\partial_\beta f_{0a} + (1-\lambda^2)\frac{q_a}{mv_{ta}\beta^{1/2}}\partial_\lambda f_{0a}\right]E_{\parallel 0}$$
$$-\frac{1-\lambda^2}{2}\beta^{1/2}v_{ta}\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B\partial_\lambda f_{0a} = \sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, f_{0b}). \tag{22}$$

Hemos aprovechado la bilinealidad del operador de colisión considerando términos de orden cero los que contienen funciones f_{0a} y f_{0b}. El sumatorio en b se refiere a todas las especies presentes, incluida la a. Aquí sólo trabajaremos con electrones y una especie iónica.

La solución estacionaria para la Ec. 22 es una maxwelliana. Esto se reconoce mejor expresando la ecuación en función de la energía cinética, $\mathcal{E} = (1/2)mv^2 = (1/2)mv_t^2\beta$, lo que haremos tomando $\mathcal{E}, \mu$ (ver Ec. 21) como variables dinámicas en vez de β, λ. Para simplificar la notación, sea $T_{0a} \doteq mv_{ta}^2/2$. Entonces $\mathcal{E} = T_{0a}\beta$, $\mu = T_{0a}\beta(1-\lambda^2)/B$, de donde se obtienen las derivadas

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial\beta}{\partial\mathcal{E}} = T_0, & \frac{\partial\beta}{\partial\mu} = \frac{T_0}{B}(1-\lambda^2) \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\mathcal{E}} = 0, & \frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = -2\lambda\beta\frac{T_0}{B}; \end{array}$$

y de ahí,

$$\begin{aligned} \partial_\beta &= T_0\partial_{\mathcal{E}} + (1-\lambda^2)\frac{T_0}{B}\partial_\mu \\ \partial_\lambda &= -2\lambda\beta\frac{T_0}{B}\partial_\mu. \end{aligned}$$

Es importante tener presente que μ es función de las coordenadas espaciales a través del campo magnético, de manera que aunque usemos las mismas coordenadas espaciales $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, el gradiente en las nuevas coordenadas debe transformarse así:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{x}'}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}} + \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\mu} = \nabla' + \nabla'\mu\frac{\partial}{\partial\mu}.$$

Para no complicar la notación, y dado que no se cambian las coordenadas espaciales, suprimiremos la prima en el gradiente.

Teniendo lo anterior en cuenta, basta con sustituir en la Ec. 22 para comprobar que, tras varias cancelaciones, se obtiene

$$v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla f_{0a} + q_a v_\parallel E_{\parallel 0} \frac{\partial f_{0a}}{\partial \varepsilon} = \sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, f_{0b}).$$

Hagamos ahora un inciso sobre la importancia de $E_\parallel$, un término que puede deberse a la inducción de corrientes desde fuera del plasma. En la Ref. [9] (ver ahí la Ec. 5.10) se aduce que en condiciones del plasma lejos de producir una corriente masiva de electrones fugitivos, dicho campo es $E_\parallel \sim m_e v_t/(q\tau_e)\sqrt{m_e/m_i}$, donde τ_e es el tiempo característico de las colisiones electrónicas; de manera que en las expresiones anteriores tenemos, para los electrones,

$$e v_{\parallel e} E_{\parallel 0} \partial_{\mathcal{E}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{1}{\tau_e}; \tag{23}$$

y un término considerablemente menor para los iones. Entonces, en la física de plasmas para fusión por confinamiento magnético el mayor término aceptable para el campo eléctrico paralelo es del orden de $\sqrt{m_e/m_i}$ veces el término colisional. En otras palabras, no puede haber una contribución de orden cero al campo paralelo ($E_{\parallel 0} = 0$) y la ecuación en este orden que obtenemos es

$$v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla f_{0a} = \sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, f_{0b}), \tag{24}$$

expresión que podemos encontrar comúnmente en la literatura y cuya bien conocida solución es una maxwelliana (luego depende de β pero no de λ) siempre y cuando se pueda hablar de acoplo colisional débil entre las especies. En las Refs. [10] (véase su §6.1) y [11] (§10.5) se recuerda que el plasma debe poderse considerar quiescente en las escalas de tiempo de la Ec. 24 para poder asegurar que $\sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, f_{0b}) = 0$ con $b \neq a$. En general, la Ec. 24 se presenta equivalentemente con el operador de colisión en la forma $\mathcal{C}(f_{0a}, f_{0a})$, es decir, considerando o bien que el plasma es isotermo o que el acoplo colisional entre las distintas especies es lo bastante débil. En cualquier caso, la función solución –la maxwelliana– pertenece al núcleo del operador de colisión y depende de los parámetros *locales* en cada superficie de flujo, $f_{0a} = f_{0a}(n_{0a}, T_{0a})$, donde $n_{0a} = n_{0a}(\rho)$ y $T_{0a} = T_{0a}(\rho)$ y la única dependencia espacial de f_{0a} es la coordenada radial que etiqueta las superficies de flujo (Sec. 2): $f_{0a}(\mathbf{x}, \beta) = f_{0a}(\rho, \beta)$. Ahora podemos volver a la Ec. 22 y reescribirla sabiendo que $\partial_\lambda f_{0a} = 0$. Se obtiene que en el estado estacionario

$$\nabla_\parallel f_{0a} = 0,$$

donde $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla$; es decir, f_{0a} es constante a lo largo de las líneas de campo magnético.

El desarrollo de la función de distribución (FdD) mediante polinomios ortogonales modulando una maxwelliana explota precisamente el que esta función represente un buen estado estacionario de referencia. A continuación consideraremos que para cualquier especie del plasma

$$f(\rho, \theta, \phi, \beta, \lambda, t) = f_0(\rho, \beta) + f_1(\rho, \theta, \phi, \beta, \lambda, t) + \ldots, \tag{25}$$

donde f_1 es una función de orden ϵ y donde los puntos suspensivos se refieren a los órdenes superiores.

3.1. Ecuación de evolución en primer orden

Para pasar al orden siguiente vamos a reescribir entera la Ec. 17 y a identificar los términos que se cancelan según la Ec. 22, pero antes de proceder es necesario hacer la siguiente observación: en la Ref. [1] se desarrolló la ecuación cinética pensando en plasmas de *stellarator*, donde la corriente del plasma, no siendo obligatoria para que la geometría magnética sea confinadora, es poco importante. El campo magnético de vacío cumple $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ en la zona de confinamiento y en esas circunstancias se pueden agrupar (ver, p.ej., [12]) las derivas por curvatura,

$$\mathbf{v}_{\kappa} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega_L} \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b})$$

y por gradiente de B,

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gradB}} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_L} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

en el término que nosotros hemos llamado $\mathbf{v}_{\nabla B}$ en la Ec. 18. Por otro lado, las comparaciones con la teoría neoclásica se van a basar en la geometría y los plasmas de tokamak, en los que la corriente paralela al campo magnético da lugar a la correspondiente deriva. Según esto, deberíamos incluir la contribución a las derivas dada por $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$. Puesto que $\nabla \times \mathbf{b} = (\nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{b} \times \nabla B)/B$, obtenemos la contribución de la corriente a la deriva por curvatura[3],

$$\frac{m v_{\parallel}^2}{eB} \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) = \frac{m v_{\parallel}^2}{eB^2} (\nabla \times \mathbf{B})_{\perp} + \frac{m v_{\parallel}^2}{e} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3}.$$

[3] Usando la identidad vectorial $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, se demuestra fácilmente la relación $(\nabla \times \hat{\mathbf{b}})_{\perp} = \hat{\mathbf{b}} \times (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}})$. Véase también la Ec. 3.79 en [9].

Más sutil es la contribución de la componente paralela de la corriente. En las Ec. 3.16 y 3.17 de la Ref. [9] aparecen los términos

$$\mathbf{v}_J = \frac{v_\perp^2}{2\Omega_L}(\nabla \times \mathbf{B})_\parallel + \frac{v_\parallel^2}{\Omega_L B}(\nabla \times \mathbf{B})_\perp = \mathbf{v}_{J\parallel} + \mathbf{v}_{J\perp}, \tag{26}$$

igual que en la Ec. 12 de la Ref. [8] con cuyos cálculos haremos comparaciones más adelante. El término $\mathbf{v}_{J\perp}$ procede de la deriva por curvatura y lo añadiremos directamente a nuestras derivas. Éste aparece naturalmente al obtener la ecuación cinética mediante transformación a las coordenadas de centro guía. Al respecto, es importante tener en cuenta que en la Ref. [8] se utiliza una descripción de ecuación cinética (basada en la Ref. [9]) diferente a la considerada en este trabajo, pues procede de un proceso distinto de promediado al giro de Larmor. A la vista, una diferencia inmediata es que aquí consideramos μ constante mientras que en la Ref. [8] esta magnitud tiene evolución temporal. Como puede comprobarse en [10] (ver Tabla 8.1 y comentarios relacionados), nuestras variables *de centro guía*, $v_\parallel$ y $v_\perp$, son consecuencia de una transformación de coordenadas que las hace un poco distintas (por un término de orden ϵ) de las correspondientes componentes de la velocidad *de las partículas*. Por lo tanto, es importante tener presente que nuestro momento magnético, que sí se conserva en orden ϵ, *no es* el momento magnético tal como se obtendría usando la verdadera componente perpendicular de la velocidad de las partículas, el cual sólo se conserva en ausencia de campo eléctrico y si el campo magnético es homogéneo. Esta sutil diferencia entre el significado de las coordenadas de centro guía –obtenidas mediante una transformación adecuada de las coordenadas del espacio de fase– y las obtenidas mediante promedios de las velocidades microscópicas, da lugar a diferentes formulaciones que requieren análisis e interpretaciones algo distintas, como se discute en la Ref. [13]. Otra consecuencia de las diferentes maneras de obtener la ecuación cinética es la presencia o no del término que nos ocupa: la contribución de la corriente paralela a modo de deriva paralela. En nuestra descripción, dicho término *no aparece explícitamente* por muy grande que sea la corriente, lo que se debe a la propia definición de $v_\parallel$. En efecto, la expresión de $\mathbf{v}_{J\parallel}$ en la Ec. 26 es incongruente con nuestra ecuación cinética y no debe aparecer. De todas formas es fácil comprobar que, si el cociente entre las presiones termodinámica y magnética es pequeño, $\beta_{\text{plasma}} \sim \epsilon$, y la corriente paralela es del orden de la corriente perpendicular, $J_\parallel \sim J_\perp$, esta deriva paralela en la descripción de Hinton y Hazeltine resulta ser de segundo orden[4]: $v_{J\parallel} \sim (\omega_t/\Omega_L)L_H v_t \mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} = (\omega_t/\Omega_L)\epsilon v_t = \epsilon^2 v_t$.

[4] Tenemos $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} = B^{-2}\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{B}\cdot\mathbf{J}/B^2 \sim \mu_0\nabla p/B^2 \sim \beta_{\text{plasma}}/L_H \sim \epsilon$.

Continuemos con la obtención de los términos de orden ϵ en nuestra ecuación cinética. Tenemos

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\nabla B} + v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_{J\perp} = \mathbf{v}_D + v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_{J\perp}.$$

Para abreviar las expresiones que resultan de las Ecs. 19 y 20 vamos a separar la dinámica del centro guía en componentes asociadas al trasporte paralelo ($\parallel$), a las derivas de orden ϵ (D), a la deriva por la corriente (J), y al campo eléctrico paralelo ($E_\parallel$). Para ello definimos:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_\parallel &= 0 \\
\dot{\beta}_D &= \frac{q}{T_0}\left(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\nabla B}\right)\cdot \mathbf{E} = \frac{q}{T_0}\mathbf{v}_{\nabla B}\cdot \mathbf{E} \\
\dot{\beta}_J &= \frac{q}{T_0}\mathbf{v}_{J\perp}\cdot \mathbf{E} \\
\dot{\beta}_{E\parallel} &= \frac{q}{T_0} v_\parallel E_\parallel \\
\dot{\lambda}_\parallel &= -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda} v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla \ln B \\
\dot{\lambda}_D &= \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\left(-\mathbf{v}_E\cdot\nabla\ln B + \frac{q}{\beta T_0}\mathbf{v}_{\nabla B}\cdot\mathbf{E}\right) \\
\dot{\lambda}_J &= \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\left(-\mathbf{v}_{J\perp}\cdot\nabla\ln B + \frac{q}{\beta T_0}\mathbf{v}_{J\perp}\cdot\mathbf{E}\right) \\
\dot{\lambda}_{E\parallel} &= (1-\lambda^2)\frac{q}{m v_t \beta^{1/2}} E_\parallel,
\end{aligned} \tag{27}$$

donde podemos ver, por la Ec. 23, que $\dot{\beta}_{E\parallel}$ y $\dot{\beta}_D$ son de orden ϵ admitiendo un campo de orden cero $-\nabla\phi_0$. El mismo argumento por el que $v_{J\parallel} \sim \epsilon^2$ da lugar a $v_{J\perp} \sim \epsilon^2$, de donde $\dot{\beta}_J$ es de orden ϵ^2. Algo parecido sucede con los términos de variación de λ: resulta un término de orden cero $\dot{\lambda}_\parallel \sim v_t/L_H = \omega_t$, mientras que $\dot{\lambda}_D$ y $\dot{\lambda}_{E\parallel}$ son de orden ϵ y $\dot{\lambda}_J$ es $\sim \epsilon^2$. Vemos entonces que en la aproximación hasta orden ϵ de la ecuación cinética de deriva la distinción entre tokamak y stellarator es irrelevante en lo que a derivas por corriente respecta.

Volviendo a la ecuación cinética Ec. 17, que reescribimos completa usando las definiciones Ec. 27, tenemos

$$\partial_t f + (\mathbf{v}_D + v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_{J\perp})\cdot\nabla f +$$

$$(\dot{\beta}_\parallel + \dot{\beta}_D + \dot{\beta}_{E\parallel} + \dot{\beta}_J)\partial_\beta f + (\dot{\lambda}_\parallel + \dot{\lambda}_D + \dot{\lambda}_{E\parallel} + \dot{\lambda}_J)\partial_\lambda f = \sum_b \mathcal{C}_{ab} \tag{28}$$

donde sustituimos la expansión de f (Ec. 25) para quedarnos con el primer orden. Así, resulta la siguiente ecuación de evolución para f_{1a}:

$$\partial_t f_{1a} + v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla f_{1a} + \mathbf{v}_D\cdot\nabla f_{0a} + (\dot{\beta}_D + \dot{\beta}_{E\parallel})\partial_\beta f_{0a}$$
$$+(\dot{\lambda}_D + \dot{\lambda}_{E\parallel})\partial_\lambda f_{0a} + \dot{\lambda}_\parallel \partial_\lambda f_{1a} = \sum_b \left[\mathcal{C}(f_{1a}, f_{0b}) + \mathcal{C}(f_{0a}, f_{1b})\right].$$

Observando que $f_{0a} \propto e^{-\beta}$, tenemos $\partial_\beta f_{0a} = -f_{0a}$; además $\partial_\lambda f_{0a} = 0$, de manera que la función f_{1a} estacionaria debe cumplir

$$v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla f_{1a} + \mathbf{v}_D\cdot\nabla f_{0a} - (\dot{\beta}_D + \dot{\beta}_{E\parallel}) f_{0a} + \dot{\lambda}_\parallel \partial_\lambda f_{1a}$$
$$= \sum_b \left(\mathcal{C}(f_{1a}, f_{0b}) + \mathcal{C}(f_{0a}, f_{1b})\right). \tag{29}$$

De nuevo, podemos relacionar esta expresión con la comúnmente usada en la literatura sin más que volver a aplicar el cambio a las coordenadas $\mathcal{E}$ y μ del espacio de velocidades. Para esto es útil recordar que $v_\perp^2 = v_t^2\beta(1-\lambda^2)$ y que $\nabla\mu = -\mu\nabla\ln B$. Entonces resulta la expresión

$$v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla f_{1a} + \mathbf{v}_D\cdot\nabla f_{0a} + T_{0a}(\dot{\beta}_D + \dot{\beta}_{E\parallel})\partial_{\mathcal{E}} f_{0a}$$
$$= \sum_b \left(\mathcal{C}(f_{1a}, f_{0b}) + \mathcal{C}(f_{0a}, f_{1b})\right),$$

que, sustituyendo[5] $E_\parallel = -\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1$ y las definiciones Ec. 27, queda

$$v_\parallel \mathbf{b}\cdot\nabla f_{1a} + \mathbf{v}_D\cdot\nabla f_{0a} - q(\mathbf{v}_D\cdot\nabla\phi_0 + v_\parallel\cdot\nabla\phi_1)\frac{\partial f_{0a}}{\partial\mathcal{E}}$$
$$= \sum_b \left(\mathcal{C}(f_{1a}, f_{0b}) + \mathcal{C}(f_{0a}, f_{1b})\right). \tag{30}$$

Hemos visto que el potencial electrostático es $\phi(\rho,\theta,\varphi) = \phi_0(\rho) + \phi_1(\rho,\theta,\varphi)$. La componente $\phi_0(\rho)$ origina el campo eléctrico radial promedio, homogéneo en las superficies de flujo, mientras que $\phi_1(\rho,\theta,\varphi)$ es responsable de mantener la ambipolaridad local en cada superficie. Este último no suele considerarse en los estudios teóricos [14], motivo por el que vamos a preparar nuestras ecuaciones agrupando dentro de una nueva función g_{1a} el potencial y la FdD de orden cero como también se hace en la Ref. [8],

$$g_{1a} = f_{1a} - f_{0a}\frac{q_a}{T_{0a}}\phi_1,$$

[5] A partir de ahora vamos a considerar que el campo eléctrico inducido es despreciable, tanto por simplicidad como por hacer un análisis semejante al de la Ref. [8]. Tenerlo en cuenta no haría más que añadir un término fuente que no tiene relevancia en lo que sigue.

donde conviene recordar que $f_{0a} = f_{0a}(\rho)$, $T_{0a} = T_{0a}(\rho)$. Sustituyendo directamente en la Ec. 29 y dado que $\mathbf{b} \cdot \nabla f_0 = 0$, $\mathbf{b} \cdot \nabla T_0 = 0$, se obtiene

$$v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla g_{1a} + \frac{q}{T_{0a}} f_{0a} v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla \phi_1 + \mathbf{v}_D \cdot \nabla f_{0a} - (\dot{\beta}_D + \dot{\beta}_{E\parallel}) f_{0a} + \dot{\lambda}_\parallel \partial_\lambda g_{1a}$$

$$= \sum_b \left(\mathcal{C}(f_{1a}, f_{0b}) + \mathcal{C}(f_{0a}, f_{1b}) \right),$$

expresión que se simplifica un poco al considerar la definición de $\dot{\beta}_{E\parallel}$ (Ec. 27):

$$v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla g_{1a} + \mathbf{v}_D \cdot \nabla f_{0a} - \dot{\beta}_D f_{0a} + \dot{\lambda}_\parallel \partial_\lambda g_{1a} = \sum_b \mathcal{C}(g_{1a}, f_{0b}) + \sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, g_{1b}). \quad (31)$$

Aquí hemos considerado, como en la Ref. [14], que $\mathcal{C}(q f_{0a}/T, f_{0b}) \approx 0$.

Para obtener la solución a la Ec. 31, en el código haremos evolucionar hasta el estado estacionario las ecuaciones

$$\frac{\partial g_{1a}}{\partial t} + v_t \lambda \beta^{1/2} \mathbf{b} \cdot \nabla g_{1a} + \dot{\lambda}_\parallel \frac{\partial f_{1a}}{\partial \lambda} - \sum_b \mathcal{C}(g_{1a}, f_{0b}) - \sum_b \mathcal{C}(f_{0a}, g_{1b}) =$$

$$-\mathbf{v}_D \cdot \nabla f_{0a} + \dot{\beta}_D f_{0a} \quad (32)$$

para electrones e iones. Hemos expresado así la ecuación para hacer explícito el que se trata de un cálculo *local*, entendiendo por esto que las g_{1a} dependen estrictamente de los valores del plasma establecidos en la correspondiente superficie de flujo: en el miembro derecho de la Ec. 32 aparece un término que puede considerarse "fuente" en la evolución de g_{1a}, pero la solución que se obtenga no alterará en absoluto el valor de g_{1a} en otra posición radial (nótese que $\mathbf{b} \cdot \nabla g_{1a} = \nabla_\parallel g_{1a}$).

Una vez obtenidas las soluciones estacionarias g_{1e} y g_{1i}, es fácil obtener ϕ_1 y las f_{1a} a partir de la condición de ambipolaridad

$$\sum_a q_a n_{0a} = 0,$$

que equivale a

$$\sum_a \frac{q_a^2 n_{0a}}{T_{0a}} \phi_1 = \sum_a q_a \int g_{1a} \mathrm{d}^3 v.$$

3.2. Flujos de partículas y calor

Hemos visto que, en el orden inferior en una expansión tomando ϵ como parámetro pequeño, la densidad, la temperatura y el potencial electrostático son funciones de la superficie de flujo. Puede decirse que el campo magnético actúa de lazo conductor por las superficies y homogeneiza las propiedades del plasma sobre ellas. No obstante, hay derivas y comportamientos que hacen que las partículas salgan de las superficies magnéticas e interesa cuantificar el transporte radial correspondiente, lo que se hace en términos de promedios en la superficie de flujo.

Los flujos tridimensionales de partículas y calor se calculan a partir de la FdD,

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x},t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathrm{d}^3v \tag{33}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},t) = \int \frac{mv^2}{2}\mathbf{v} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathrm{d}^3v, \tag{34}$$

pero normalmente interesa conocer los flujos radiales, algo proporcional en cada punto a $\mathbf{\Gamma}\cdot\nabla\psi$ y $\mathbf{Q}\cdot\nabla\psi$. Ahora, si ψ es una coordenada general para las superficies magnéticas, se define el promedio de la cantidad $G(\psi,\theta,\varphi)$ en la correspondiente superficie como

$$\bar{G}(\psi) = \langle G(\psi,\theta,\varphi)\rangle = \frac{\int_{\Delta V} G(\psi,\theta,\varphi)\mathrm{d}V}{\int_{\Delta V}\mathrm{d}V}, \tag{35}$$

donde el recinto de integración ΔV es una corona de volumen diferencial que abarca la superficie magnética sobre la que se desea promediar. Una propiedad interesante y muy utilizada [9] del operador de promedio es que aniquila, para toda $G(\mathbf{x})$ continua en el espacio, el operador $\mathbf{B}\cdot\nabla$ de derivación a lo largo de la dirección del campo,

$$\langle \mathbf{B}\cdot\nabla G(\mathbf{x})\rangle = 0;$$

es decir, el promedio a una superficie magnética de las variaciones de G a lo largo del campo magnético es nulo. Es para preservar esta propiedad que se define así el promedio de los flujos de partículas y calor en la superficie magnética y no, por ejemplo, en las maneras más inmediatas,

$$\Gamma(\psi,t) = \frac{\int_S \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x},t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{\int_S \mathrm{d}S},\ Q(\psi,t) = \frac{\int_S \mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{\int_S \mathrm{d}S};$$

donde S representa la superficie magnética sobre la que se promedia. Como es lógico, las integrales en coronas diferenciales que aparecen en la Ec. 35

no son equivalentes en el límite a la integral sobre la superficie magnética, pues la corona siempre posee información de su anchura relativa, aún en el límite diferencial, a través del jacobiano J. Se puede decir que el operador de promedio es una integral de superficie pesada por el grosor local de la corona. En concreto, recordando que los elementos de superficie y de volumen pueden, respectivamente, expresarse como $\mathrm{d}V = J\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ y $\mathrm{d}\mathbf{S} = J\nabla\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$, podemos relacionarlos para comprobar que en el límite $\Delta V \to 0$

$$\langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla\psi \rangle = \frac{1}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}\psi} \int \mathbf{\Gamma} \cdot \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \mathrm{d}S = \frac{1}{V'} \int \mathbf{\Gamma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{36}$$

Para calcular flujos radiales promediaremos la cantidad $\mathbf{\Gamma}\cdot\nabla\psi/|\nabla\psi|$. Obsérvese que en geometría cilíndrica las dos definiciones de promedio coinciden, $\langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla r \rangle = (1/S) \int \mathbf{\Gamma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. Usaremos la fórmula Ec. 36 para obtener los flujos promedio usando $\psi = \rho$ (ver Sec. 2.1) como coordenada radial. Así, para las partículas tenemos

$$\Gamma(\psi, t) = \langle \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\rho \rangle \,; \tag{37}$$

y en el caso del calor,

$$Q(\psi, t) = \langle \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\rho \rangle \,. \tag{38}$$

Sustituyendo las Ecs. 33 y 34, tendríamos las expresiones exactas para los flujos en la precisión de la ecuacion cinética de centro guía. Sin embargo, estamos interesados en comparar los resultados del código con las expresiones para los flujos al más bajo orden en la teoría (ϵ^2), de manera que usaremos las velocidades hasta orden ϵ, esto es,

$$\Gamma_a = \left\langle \int f_a \mathbf{v}_D \cdot \nabla\rho \; \mathrm{d}^3 v \right\rangle$$

$$Q_a = \left\langle \int \frac{mv^2}{2} f_a \mathbf{v}_D \cdot \nabla\rho \; \mathrm{d}^3 v \right\rangle,$$

donde $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\nabla B}$ (ver §3.1).

La variación del potencial electrostático dentro de las superficies magnéticas [8, 14] afecta a los flujos. Sin embargo, en la teoría convencional [9] es común despreciar dicho potencial. Observando las Ecs. 31 y 32 se puede llegar a la conclusión de que ignorar el potencial es equivalente a tomar como función de distribución resultante g_{1a} en lugar de f_{1a}. En los trabajos [14, 15] se demuestra que, en tal caso, los flujos de partículas son idénticos pero no ocurre lo mismo con los de calor, pues aunque el flujo de calor iónico es del mismo orden, el electrónico se demuestra que es $\sqrt{m_i/m_e}$ mayor al

tener en cuenta el potencial electrostático. Por esto se definen unos flujos de calor modificados [14] usando g_a en vez de f_a, cuyos valores coinciden con los obtenidos por la teoría neoclásica convencional, la cual desprecia las perturbaciones del potencial electrostático dentro de una misma superficie magnética. En definitiva, los flujos de las simulaciones que calcularemos para hacer comparaciones con los resultados teóricos son las versiones modificadas

$$\Gamma_a^{\mathrm{NC}} = \left\langle \int g_{1a} \mathbf{v}_D \cdot \nabla\rho \, \mathrm{d}^3 v \right\rangle \tag{39}$$

$$Q_a^{\mathrm{NC}} = \left\langle \int \frac{m_a v^2}{2} g_{1a} \mathbf{v}_D \cdot \nabla\rho \, \mathrm{d}^3 v \right\rangle, \tag{40}$$

de acuerdo con los estimados en la teoría neoclásica, como se señala en la Ref. [14].

4. Estudios de convergencia

4.1. Convergencia espacial

Como primera comprobación, se va a estudiar la convergencia de flujos y corrientes del plasma a medida que se incrementa el número de elementos de malla o el orden de los polinomios que interpolan espacialmente las magnitudes. Aunque veremos que a medida que los flujos convergen también se van acercando a la condición de ambipolaridad, $\Gamma_i^{\mathrm{NC}} = \Gamma_e^{\mathrm{NC}}$, la importante cuestión del flujo ambipolar se tratará mas adelante.

En cada gráfica de la figura 7 mostramos los perfiles radiales de Γ_i^{NC} y Γ_e^{NC} en función de la coordenada radial normalizada obtenidos usando grados 2 y 3 para la interpolacion espacial. La misma información se repite usando las mallas G1 (arriba), G2 (centro) y G3 (abajo) y dos temperaturas (100 eV, izda.; 150 eV, dcha.). La observación clave es que la convergencia aumenta a medida que crece el número de elementos de malla o el orden polinómico de interpolación, pero es el orden polinómico el elemento más significativo. El paso de $N = 2$ a $N = 3$ tiene un efecto drástico en la mejora de la convergencia (y la ambipolaridad), lo que se hace más notable a mayor temperatura. Se tomará orden 3 como compromiso entre cantidad de cálculo y precisión. Otro factor importante para obtener una buena convergencia es el número de elementos en cada corona radial, ya que la mayor diferencia se observa al pasar de G1 a G2 (recuérdese la figura 4), donde se incrementan los elementos por corona. Sin embargo, al pasar de G2 a G3 (incremento de coronas) los resultados son similares y sólo se suavizan.

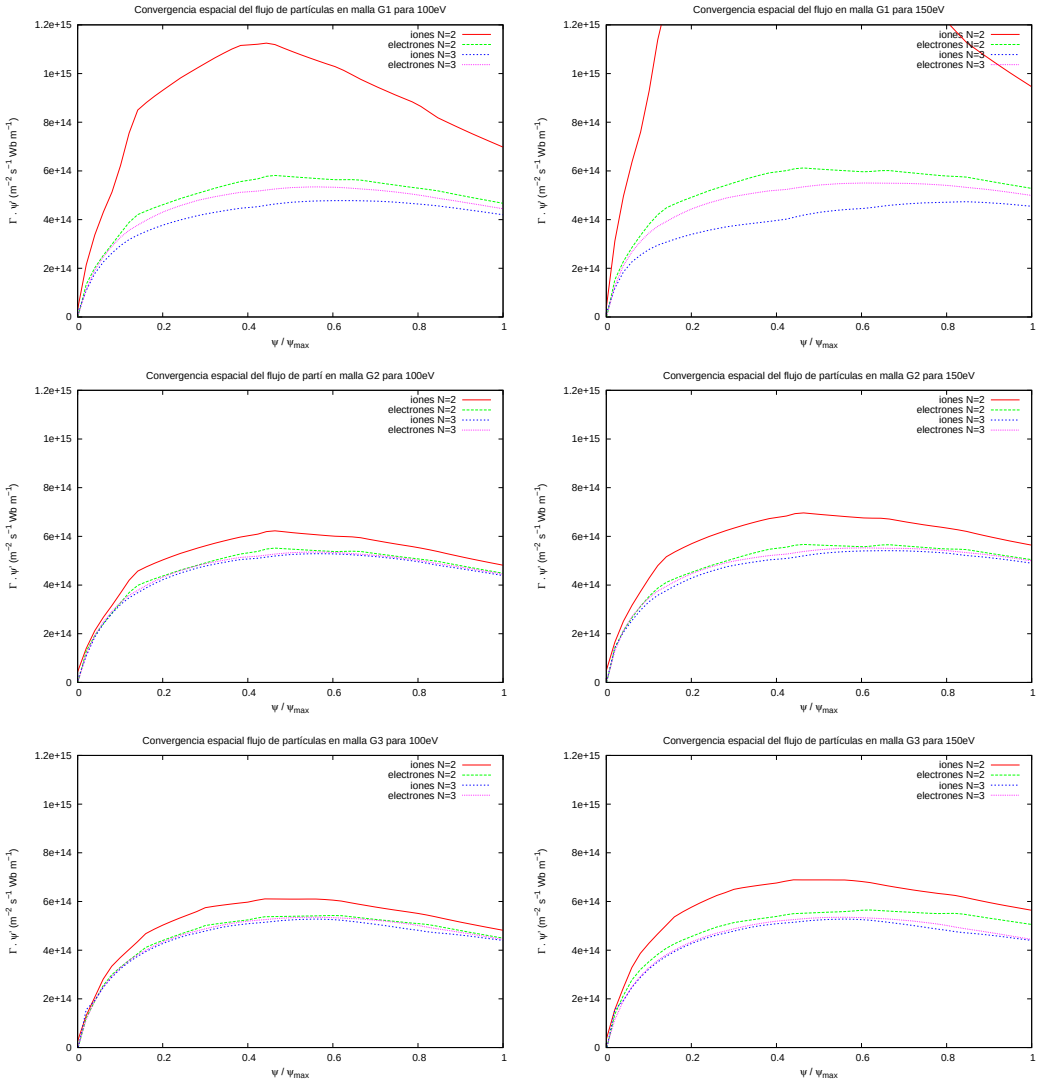

Figura 7: Convergencia en función de la malla para el dispositivo T-II a 100 eV (izquierda) y 150 eV (derecha) y mallas G1, G2 y G3 (de arriba a abajo). En cada gráfica se muestra el flujo normalizado de iones y electrones con interpolación espacial 2 y 3.

En la figura 8 observamos el mismo comportamiento en los flujos de calor Q_i^{NC} (arriba) y Q_e^{NC} (centro); y en la corriente paralela $J_{\parallel}^{\mathrm{NC}}$ (abajo). En cada gráfica superponemos los resultados obtenidos con las distintas mallas y órdenes de interpolación. Como antes, las figuras de la izquierda corresponden a 100 eV y las de la derecha a 150 eV. Es interesante notar que las mayores disparidades a baja resolución se encuentran en Q_i^{NC}, mientras que el comportamiento de la corriente es bastante robusto. De nuevo, el efecto del orden de interpolación espacial es muy importante.

Los resultados análogos para las mallas G4 y G5 son similares, por lo que no se muestran para evitar redundancia.

El comportamiento del dispositivo T-I es cualitativamente similar y por lo tanto el orden polinómico es el factor más importante en la convergencia. A modo de ejemplo, la figura 9 muestra el flujo de partículas (arriba) y Q_i^{NC} (abajo) obtenidos con la geometría T-I y la malla G6 (figura 6). De nuevo, el orden 3 de interpolación espacial parece suficiente.

4.2. Convergencia en el espacio de velocidades

En base a los resultados del §4.1, adoptamos para las siguientes comprobaciones la malla G2 y un orden polinómico de interpolación espacial $N = 3$.

Estudiemos la convergencia en el espacio de velocidades, cuya precisión viene dada por los $N_\beta \times N_\lambda$ modos en que está expandida la FdD. Presentamos en las figuras 11 y 12 los perfiles de los flujos y la densidad de corriente paralela obtenidos con dos temperaturas, 100 eV y 200 eV. Se observa que la convergencia es más rápida en el caso de 100 eV, lo cual es lógico puesto que las colisiones actúan en el espacio de velocidades como un operador de difusión que tiende a aniquilar los modos de orden alto. A bajas temperaturas las colisiones dominan sobre la dinámica de convección y, por tanto, basta con un número menor de modos para alcanzar la convergencia.

En adelante usaremos siempre, al menos, $N_\beta \times N_\lambda = 5 \times 8$. Como antes, para no ser redundantes no mostramos las simulaciones análogas para el caso T-I, donde se aprecia un comportamiento de los perfiles cualitativamente similar al de T-II.

5. Comparación con la teoría neoclásica

5.1. Fórmulas

Las fórmulas que se han empleado para hacer comparaciones entre teoría y resultados numéricos pueden encontrarse en la revisión de Hinton y Hazeltine

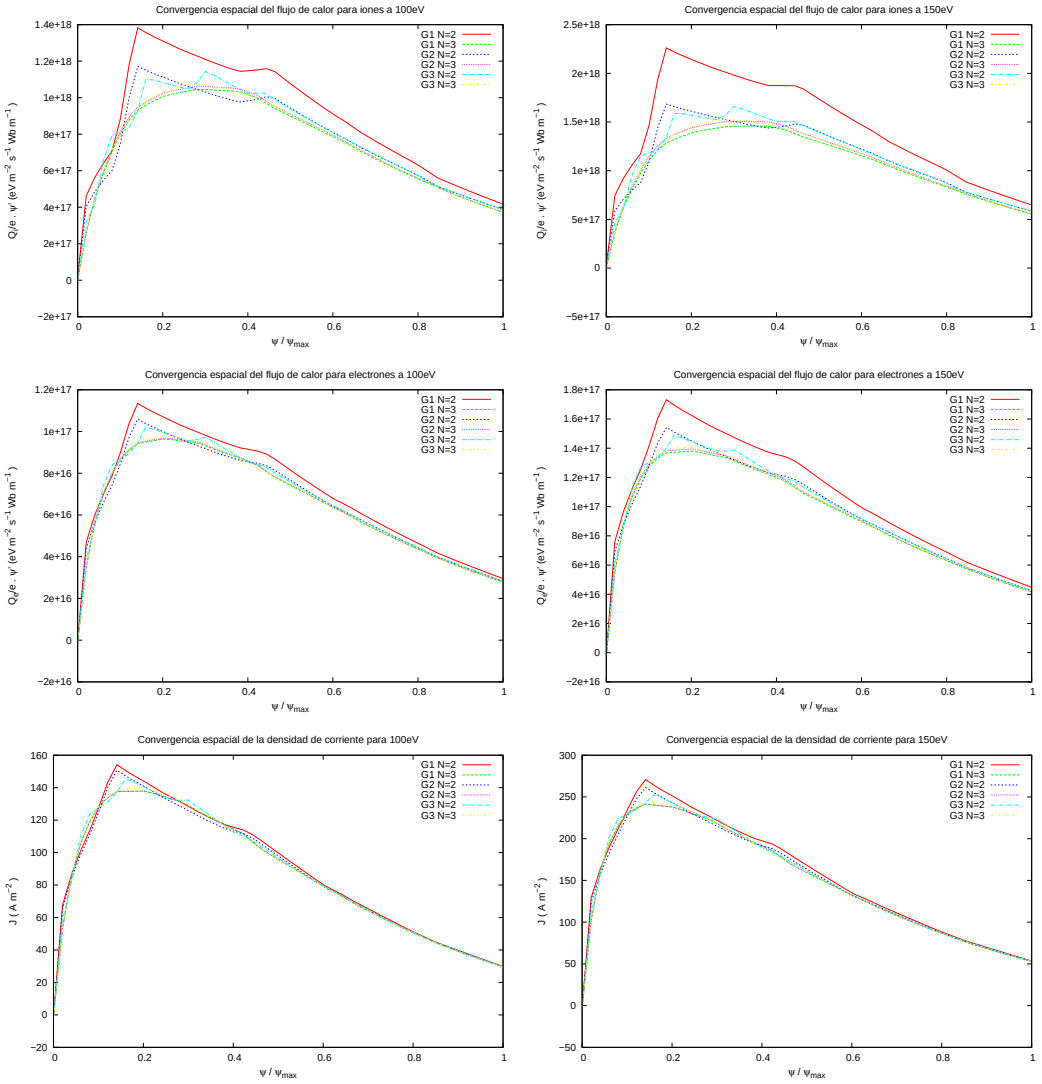

Figura 8: Convergencia en función de la malla en la geometría T-II a 100 eV (izquierda) y 150 eV (derecha). De arriba a abajo: flujo de calor iónico normalizado, flujo de calor electrónico normalizado y corriente toroidal. En cada gráfica se muestra el resultado correspondiente a las mallas G1, G2, G3 y usando órdenes de interpolación espacial 2 y 3.

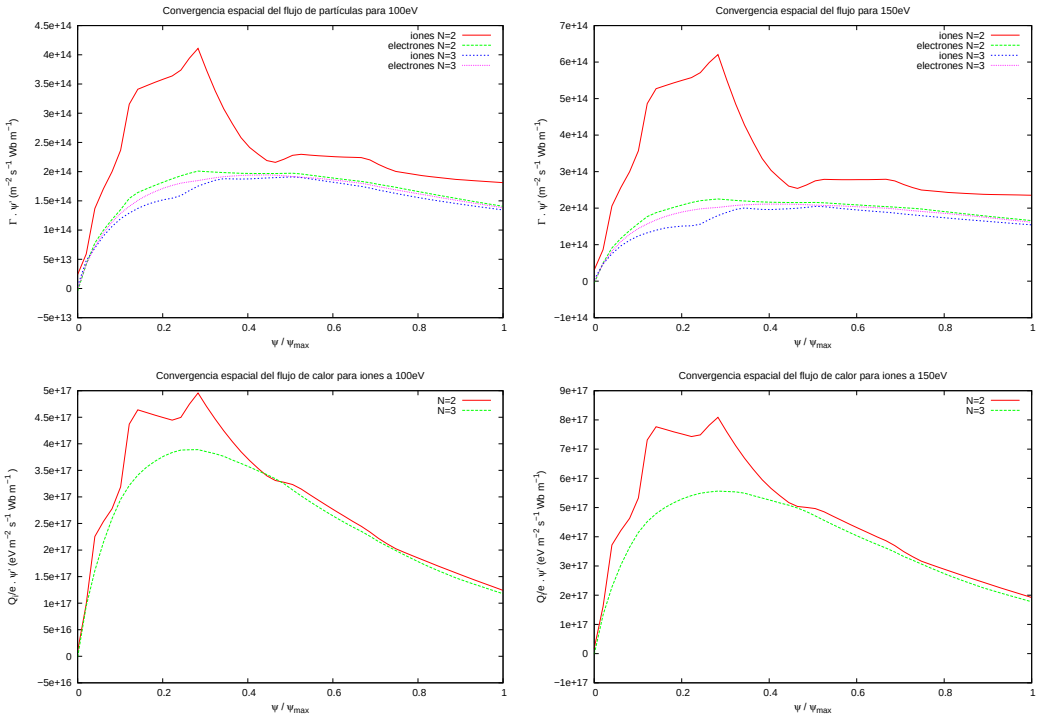

Figura 9: Convergencia en función de la malla G6 para el dispositivo T-I a 100 eV (izquierda) y 150 eV (derecha). De arriba a abajo: flujo de partículas y flujo de calor iónico normalizado. En cada gráfica se muestra el resultado usando órdenes de interpolación espacial 2 y 3.

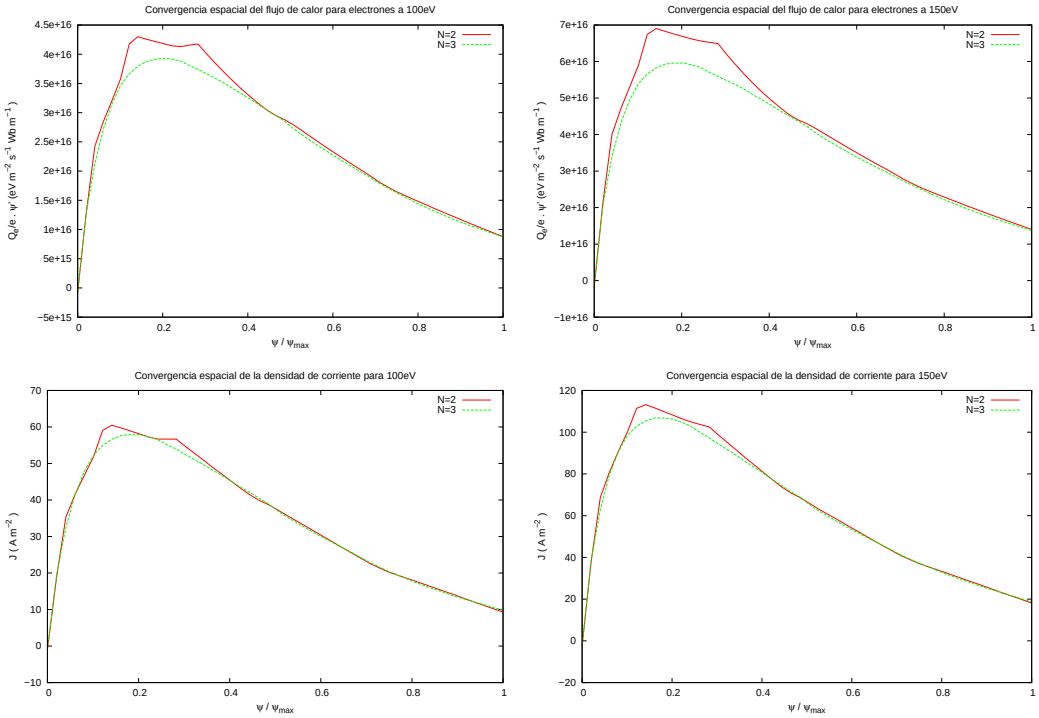

Figura 10: Mismas condiciones que en la Fig. 9 para el flujo de calor electrónico normalizado (arriba) y la corriente toroidal (abajo).

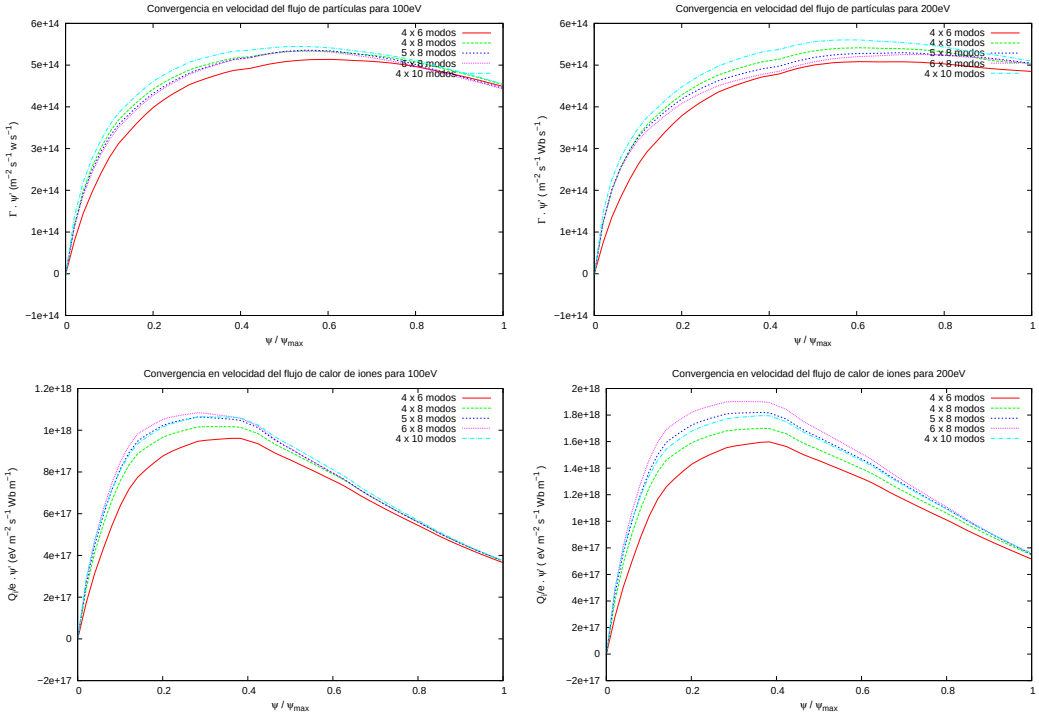

Figura 11: Convergencia en función del número de modos de velocidad para el dispositivo T-II a 100 eV (izquierda) y 200 eV (derecha). De arriba a abajo: flujo de partículas y flujo de calor iónico. En cada gráfica se muestran los resultados para $[N_\beta, N_\lambda] = [4,6]$, $[4,8]$, $[4,10]$, $[5,8]$ y $[6,8]$ modos en el espacio de velocidades.

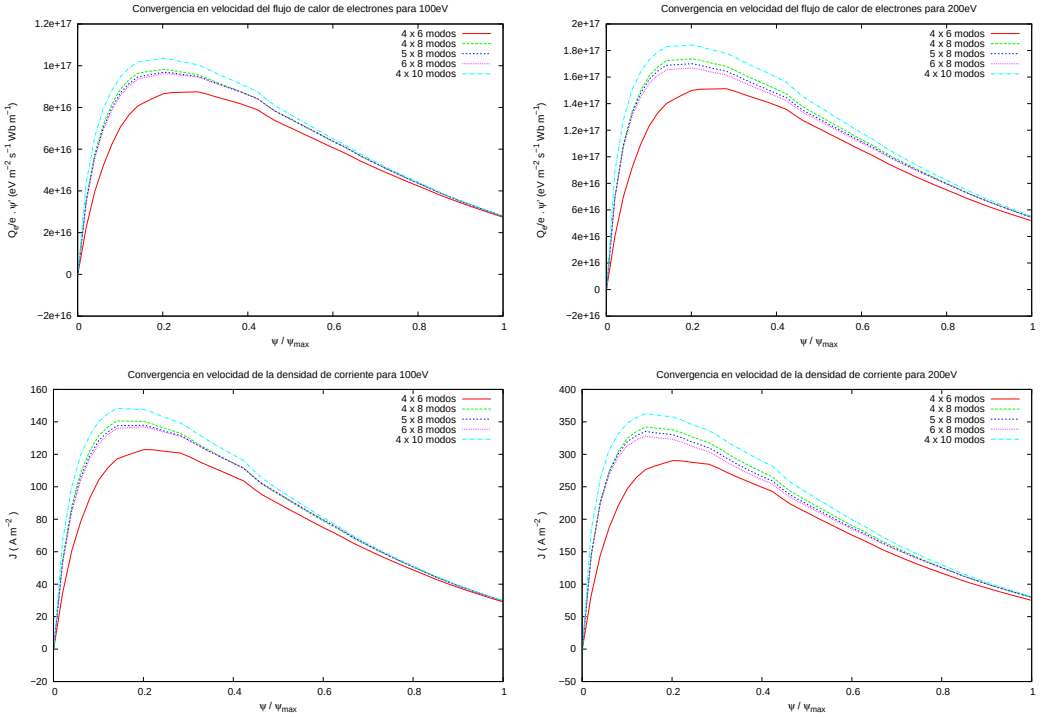

Figura 12: Mismas condiciones que en la fig. 11 para el flujo de calor electrónico normalizado y la densidad de corriente toroidal.

[9] o, igualmente, en el trabajo numérico de la Ref. [8] que se basa en esta misma formulación. Para facilitar la lectura la resumimos aquí.

Recordemos que en la teoría del transporte neoclásico de Hinton y Hazeltine se hace un estudio para cada régimen de colisionalidad y finalmente (sección VI en [9]) se unifican las expresiones mediante un ajuste válido para cualquier colisionalidad en la aproximación de acoplo débil, que desprecia el efecto sobre los iones de sus colisiones con los electrones. Otro aspecto importante es que, como los autores advierten, se trata de expresiones obtenidas en condiciones de geometría magnética axisimétrica y alta relación de aspecto. En particular, hacen uso de los campos efectivos y las condiciones que dan lugar al dispositivo que hemos llamado T-I en el apartado 2.1.1.

Los flujos neoclásicos de partículas y calor se expresan en función de las fuerzas termodinámicas asociadas a los diversos gradientes del plasma para cada especie $a = \{e, i\}$ (temperatura, T_{0a}; presión, p_{0a}). Llamando r en vez de ρ a la coordenada radial para evitar confusión con el radio de Larmor, tenemos

$$\frac{\Gamma_e}{n_{0e}} = -\sqrt{\epsilon}\frac{q^2\rho_{e0}^2}{\tau_e\epsilon^2}\left(K_{11}A'_{1e} + K_{12}\frac{\partial \ln T_{0e}}{\partial r}\right) \tag{41}$$

$$\frac{Q_e}{n_{0e}T_{0e}} = -\sqrt{\epsilon}\frac{q^2\rho_{e0}^2}{\tau_e\epsilon^2}\left(K_{12}A'_{1e} + K_{22}\frac{\partial \ln T_{0e}}{\partial r}\right), \tag{42}$$

siendo

$$A'_{1e} = \frac{\partial \ln p_{0e}}{\partial r} - \frac{5}{2}\frac{\partial \ln T_{0e}}{\partial r} + \frac{T_{0i}}{T_{0e}}\left(\frac{\partial \ln p_{0i}}{\partial r} - \frac{A_0}{1+\nu_{*e}^2\epsilon^2}\frac{\partial \ln T_{0i}}{\partial r}\right),$$

y la cantidad adimensional

$$A_0 = \left(\frac{1{,}17 - 0{,}35\sqrt{\nu_{*i}}}{1 + 0{,}7\sqrt{\nu_{*i}} - 2{,}1\nu_{*i}^2\epsilon^3}\right)\frac{1}{1+\nu_{*i}^2\epsilon^3}.$$

En estas expresiones se han hecho algunas simplificaciones –igual que en la Ref. [8]– con respecto a las dadas por Hinton y Hazeltine, como aproximar $(r/R_0)^2 \approx \epsilon^2$ y despreciar el término relacionado con $\langle E_\parallel/B_{P0}\rangle$. La frecuencia ciclotrónica se define aquí con respecto al campo efectivo, $\Omega_{0a} = q_a B_{T0}/m_a$. Los radios de Larmor para cada especie están expresados mediante la velocidad térmica en base a esta frecuencia ciclotrónica, $\rho_{0a} = v_{ta}/\Omega_{0a}$, y las frecuencias de colisión se presentan en forma adimensional,

$$\nu_{*a} = \frac{\sqrt{2}qR_0}{\tau_a\epsilon^{3/2}v_{ta}}, \tag{43}$$

donde q es el factor de seguridad. Para no confundirlo con las cargas de las especies, éstas llevan el correspondiente subíndice. Ahora el parámetro ϵ es la

inversa de la relación de aspecto A y aparece en la teoría por su relación con la fracción de partículas atrapadas en una geometría axisimétrica sencilla.

Tomando la temperatura en unidades de energía, los tiempos de colisión en el sistema CGS son

$$\tau_{ab}^{-1} = \frac{\sqrt{2}\pi q_a^2 q_b^2 n_{0b}}{m_a^{1/2} T_{0a}^{3/2}} \ln \Lambda,$$

y en el sistema SI se expresan como

$$\tau_{ab}^{-1} = \frac{\sqrt{2} q_a^2 q_b^2 n_{0b}}{\epsilon_0^2 16\pi m_a^{1/2} T_{0a}^{3/2}} \ln \Lambda,$$

siendo ϵ_0 la constante dieléctrica del vacío. Además usaremos

$$\tau_i^{-1} = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\tau_{ii}^{-1}$$

$$\tau_e^{-1} = \left(\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\tau_{ei}^{-1}.$$

Las constantes adicionales que faltan vienen dadas por:

$$K_{mn} = K_{mn}^{(0)}\left[\frac{1}{1 + a_{mn}\sqrt{\nu_{*e}} + b_{mn}\nu_{*e}} + \frac{\epsilon^{3/2}(c_{mn}^2/b_{mn})\nu_{*e}\epsilon^{3/2}}{1 + c_{mn}\nu_{*e}\epsilon^{3/2}}\right],$$

donde deben tomarse los valores numéricos

$$\left[K_{11}^{(0)}, a_{11}, b_{11}, c_{11}\right] = [1{,}04, 2{,}01, 1{,}53, 0{,}89]$$

$$\left[K_{12}^{(0)}, a_{12}, b_{12}, c_{12}\right] = [1{,}20, 0{,}76, 0{,}67, 0{,}56]$$

$$\left[K_{22}^{(0)}, a_{22}, b_{22}, c_{22}\right] = [2{,}55, 0{,}45, 0{,}43, 0{,}43].$$

El flujo de calor iónico viene dado por

$$\frac{Q_i}{n_{0i}T_{0i}} = -\sqrt{\epsilon}\frac{q^2\rho_{i0}^2}{\tau_i\epsilon^2}K_2^{(0)}\left[\frac{1}{1 + a_2\sqrt{\nu_{*i}} + b_2\nu_{*i}} + \frac{(c_2^2/b_2)\nu_{*i}\epsilon^3}{1 + c_2\nu_{*i}\epsilon^{3/2}}\right]\frac{\partial \ln T_{0i}}{\partial r}, \quad (44)$$

con las constantes

$$\left[K_2^{(0)}, a_2, b_2, c_2\right] = [0{,}66, 1{,}03, 0{,}31, 0{,}74]$$

según corresponden al modelo de Hinton y Hazeltine, como antes.

Una cantidad difícil de estimar habitualmente, pero muy importante, es la corriente toroidal del plasma. Una contrapartida teórica se encuentra en la ecuación 6.122 de [9], derivada para máquinas tokamak de gran relación de aspecto. Si se tiene en cuenta que en dicha referencia $E_\parallel$ es el campo inductivo (despreciado como término de segundo orden en las derivas, §3.1) se obtiene

$$J = \left\langle J_\parallel B \right\rangle / B_{T0} = -n_{0e} T_{0e} \sqrt{\epsilon} \frac{q}{\epsilon^2 \epsilon B_{po}} \left(K_{13} A'_{1e} + K_{23} \frac{\partial \ln T_{0e}}{\partial r} \right) \tag{45}$$

donde $K_{13} = 2{,}30$, $K_{23} = 4{,}19$ y A'_{1e} se ha definido arriba. Esta corriente, en los regímenes acolisionales, tiene una fuerte contribución de la llamada corriente de *bootstrap*. Por otro lado, la corriente toroidal promedio es

$$J_{\text{tor}} = \langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\phi \rangle = \langle J_\phi \rangle$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_\phi$ es el vector unitario en la dirección toroidal. Puesto que vamos a calcular casos de alta relación de aspecto, puede aproximarse $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}_{T0}$. Así $\mathbf{b} \simeq \hat{\mathbf{u}}_\phi$ y la corriente puede estimarse numéricamente como

$$J = \left\langle J_\parallel B \right\rangle / B_{T0} \simeq \left\langle J_\parallel \right\rangle \simeq \langle J_\phi \rangle = J_{\text{tor}}.$$

Se han programado todas estas expresiones para obtener los valores teóricos que mostraremos en el §5.3.

5.2. Ambipolaridad

Como es sabido, los flujos colisionales de las distintas especies del plasma no son en general intrínsecamente ambipolares, ni siquiera para un tokamak axisimétrico [16]. Sin embargo, este último caso sí permite deducir la condición de ambipolaridad, aunque aproximadamente, usando las ecuaciones del movimiento. Recordemos brevemente el porqué [9].

Si, como debe ser, el operador de colisión $\mathcal{C}_{ab}$ entre las distintas especies conserva la energía y el momento en las colisiones electrostáticas, la fuerza de fricción colisional $\mathbf{F}_a = \sum_b \int \mathrm{d}^3\mathbf{v} m_a \mathbf{v} \mathcal{C}_{ab}$, sumada a todas las especies, debe ser nula:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0.$$

En consecuencia, la suma de flujos "clásicos"

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{C}} = -\frac{1}{qB} \mathbf{b} \times \mathbf{F}$$

da lugar a la condición $\sum_a q_a \mathbf{\Gamma}_a^{\mathrm{C}} = 0$. En el caso particular de los sistemas axisimétricos, la conservación del momento colisional permite afirmar que los flujos totales son igualmente ambipolares hasta el segundo orden. En la Ref. [9] se expresa así:

$$\sum_a q_a \left\langle \mathbf{\Gamma}_a \cdot \nabla\psi \right\rangle = 0,$$

donde los corchetes indican promedio en la superficie de flujo etiquetada por la coordenada ψ y $\mathbf{\Gamma}_a$ representa el flujo colisional neoclásico de partículas de la especie a. Estas condiciones (simetría, orden en el parámetro de radio de Larmor y propiedades de conservación en el operador de colisión) se dan en las ecuaciones que haremos evolucionar, de manera que la ambipolaridad "intrínseca" es una primera condición que el código debe verificar. Por supuesto, en cálculos más avanzados y geometrías no axisimétricas la ambipolaridad debe ser consecuencia de los campos eléctricos autoconsistentes.

5.3. Comparaciones

Vamos ahora a comparar los flujos de partículas y de calor, así como la corriente toroidal, con la teoría neoclásica. En este apartado se usa como masa iónica la del deuterio para que los resultados sean directamente comparables con los resultados numéricos de la Ref. [8]. Antes de seguir advertimos de que en los desarrollos teóricos se hacen expansiones de la FdD que no son iguales a las del cálculo numérico. En éste, la precisión de la perturbación a la maxwelliana que se toma como estado de referencia viene dada por el número de modos tomados en la expansión, es decir, por los valores N_β y N_λ como se explica en el §3.4 de la Ref. [1]. Sin embargo, en la obtención de las expresiones 41, 42 y 44 se ha usado [9] una expansión de g_1 en potencias de la colisionalidad para resolver la Ec. 30 y, posteriormente, una expansión en la relación de aspecto (inversa) para el caso toroidal axisimétrico. Otro aspecto importante es que los resultados son sensibles al operador de colisión (véase, precisamente, la Ref. [8], donde se estudian las diferencias entre varios operadores de colisión comúnmente aceptados) y las comparaciones se basan en operadores diferentes. Como se expuso en un informe anterior [1], nuestras simulaciones se basan en un operador de colisión bastante reciente [17], distinto tanto al usado en las formulaciones teóricas como en las simulaciones de la Ref. [8]. Pese a todo, si las comparaciones se efectúan en condiciones típicas de colisionalidad cabe esperar que los resultados de teoría y simulaciones se encuentren claramente dentro del mismo orden de magnitud y, lo que es más importante, que muestren un comportamiento semejante frente a la colisionalidad.

5.3.1. Ambipolaridad

En primer lugar, en la figura 13 se comparan los perfiles de los flujos de partículas Γ_i^{NC} y Γ_e^{NC} para estudiar la ambipolaridad en simulaciones con temperatura electrónica central de 10, 50, 100, 150 y 200 eV (ver §2.2). Para la discretización se utiliza la malla G5, orden 3 en interpolación espacial y $N_\beta \times N_\lambda = 6 \times 10$ modos en el espacio de velocidades. Los flujos se han calculado mediante las Ecs. 39 y 40 y se observa una pequeña desviación de la ambipolaridad a medida que aumenta la temperatura. Como se ha visto en el §4.1, esto es debido a la discretización espacial, en concreto a la resolución en la coordenada poloidal θ. Debemos advertir que la aparente no ambipolaridad no se debe a que el operador de colisión no conserve el momento lineal. Estimando los flujos a partir del operador de colisión, éstos son exactamente ambipolares –precisión de máquina de cómputo– porque el operador de colisión utilizado garantiza la conservación del momento. A cambio, en el cálculo de las integrales Ecs. 39 y 40 se usa un número limitado de modos de la función de distribución y se evalúa una integral en cuya precisión interviene la malla de cálculo. A medida que se incrementa la precisión geométrica, la ambipolaridad a través de las Ecs. 39 y 40 se observa mejor.

5.3.2. Flujos de partículas y calor

Una vez hecha la comprobación fundamental de la ambipolaridad, vamos a comparar los resultados de las simulaciones (mantenemos los parámetros de antes: malla G5, interpolación $N = 3$ y $N_\beta \times N_\lambda = 5 \times 8$) con los resultados obtenidos mediante las fórmulas del §5.1. A partir de aquí no haremos distinción entre electrones e iones para el flujo de partículas y nos referiremos sin más al flujo de partículas Γ^{NC}. En el caso de los flujos de calor, mostrados en la figura 15 para los iones y en la 16 para los electrones, se encuentra un comportamiento parecido, aunque con mayor discrepancia para el flujo de calor iónico. En este caso, el flujo de calor Q_i^{NC} según la Ec. 44 es notablemente inferior en la mitad exterior del plasma.

La figura 14 (izda.) muestra los perfiles de Γ^{NC} obtenidos por simulación a varias temperaturas. En la figura de la derecha se representan los mismos perfiles según se obtienen de la fórmula 41. Se observa mayor concordancia a baja colisionalidad (altas temperaturas), probablemente porque la diferencia entre operadores de colisión es menos importante aquí.

5.3.3. Corriente toroidal

Uno de los usos más importantes para los que se ha diseñado el código de transporte es el cálculo de la corriente toroidal neoclásica. Ésta es muy

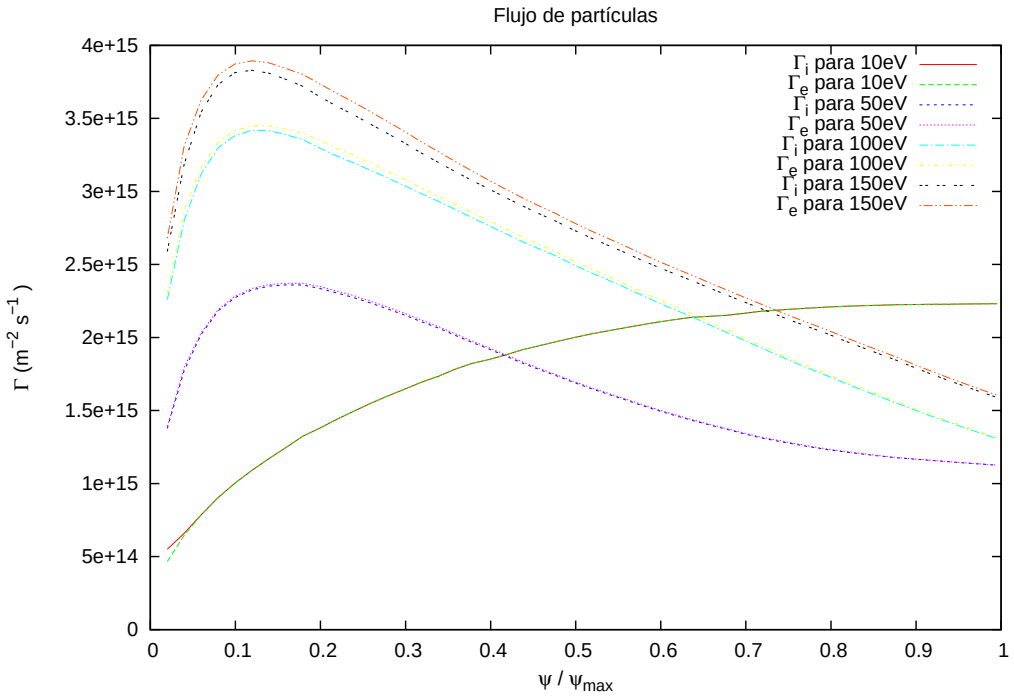

Figura 13: Estudio de ambipolaridad. Se muestran los perfiles de los flujos neoclásicos de electrones e iones usando perfiles de temperatura con distinto valor central.

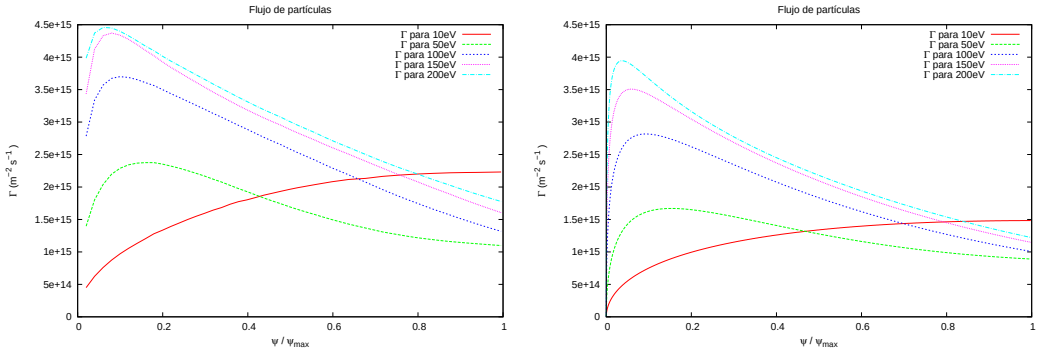

Figura 14: Flujos de partículas obtenidos por simulación (izquierda) y mediante la fórmula teórica Ec. 41 (derecha).

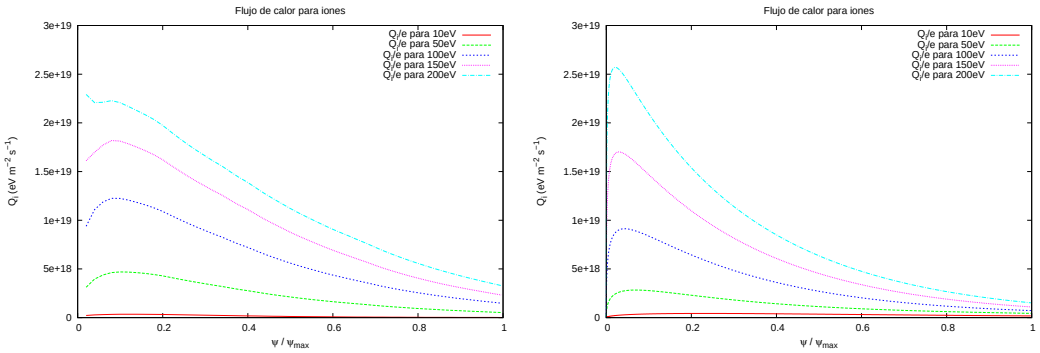

Figura 15: Flujos de calor iónico obtenidos por simulación (izquierda) comparados con los obtenidos mediante la fórmula Ec. 44 de la teoría (derecha).

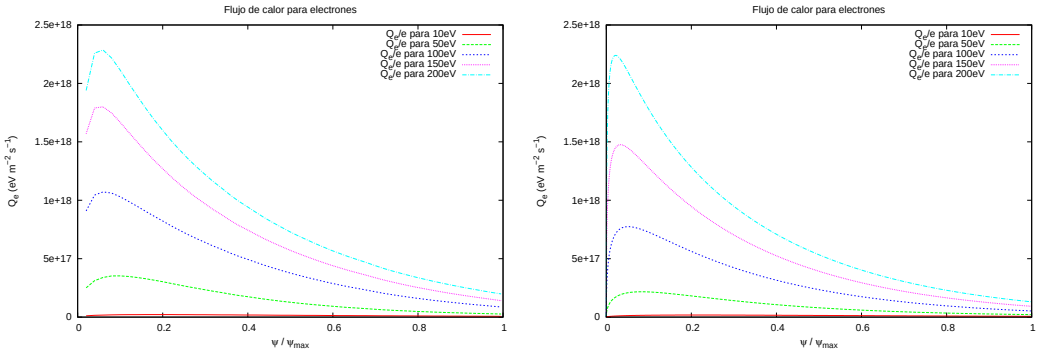

Figura 16: Flujos de calor electrónico obtenidos por simulación (izquierda) comparados con los obtenidos mediante la fórmula Ec. 42 de la teoría (derecha).

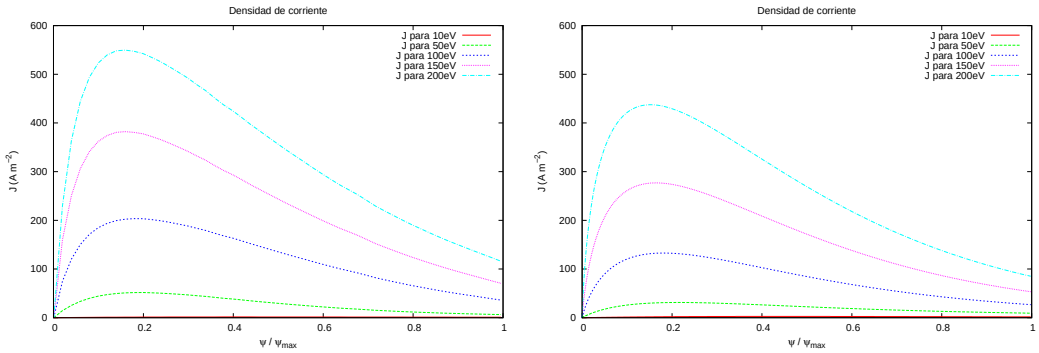

Figura 17: Densidad de corriente toroidal obtenida por simulación numérica (izquierda) en comparación con la teoría (derecha).

costosa de calcular en cuanto la geometría magnética es complicada, y hoy por hoy imposible de estimar razonablemente por medios analíticos en geometrías tan complejas como, por ejemplo, las configuraciones de tipo *Heliac* [18]. Por otro lado, el tratamiento del transporte paralelo es muy delicado incluso en códigos que lo contemplan, como el nuestro. Es, entonces, del todo relevante establecer comparaciones con los casos en los que existen estimaciones teóricas aceptables.

Los perfiles de la densidad de corriente toroidal, tanto simuladas como teóricas, se muestran en la figura 17 para el mismo conjunto de perfiles de temperatura que en los casos anteriores. De nuevo las tendencias y valores son similares en todas las temperaturas, aunque el máximo de la corriente, cerca del eje magnético, viene a ser en torno a un 25 % mayor según las simulaciones.

5.3.4. Colisionalidad

Para comprender mejor las propiedades de los plasmas, suele ser habitual estudiar los flujos y la corriente en función de la colisionalidad (Ec 43). En la figura 18 se muestran los resultados provenientes de las simulaciones y de la teoría. Se ha usado en el eje de abscisas una variable proporcional a la colisionalidad con el objetivo de hacer más sencilla la comparación con los resultados numéricos de [8].

Tanto en los flujos como en las corrientes, las curvas son parecidas pero no idénticas. Las diferencias pueden achacarse principalmente al uso de operadores de colisión diferentes. No obstante, las pequeñas aproximaciones efectuadas durante el desarrollo teórico en el modelo, y las necesarias para obtener resultados teóricos, pueden dar lugar también a una ligera discrepancia. Por lo demás, de los datos obtenidos puede mencionarse el crecimiento

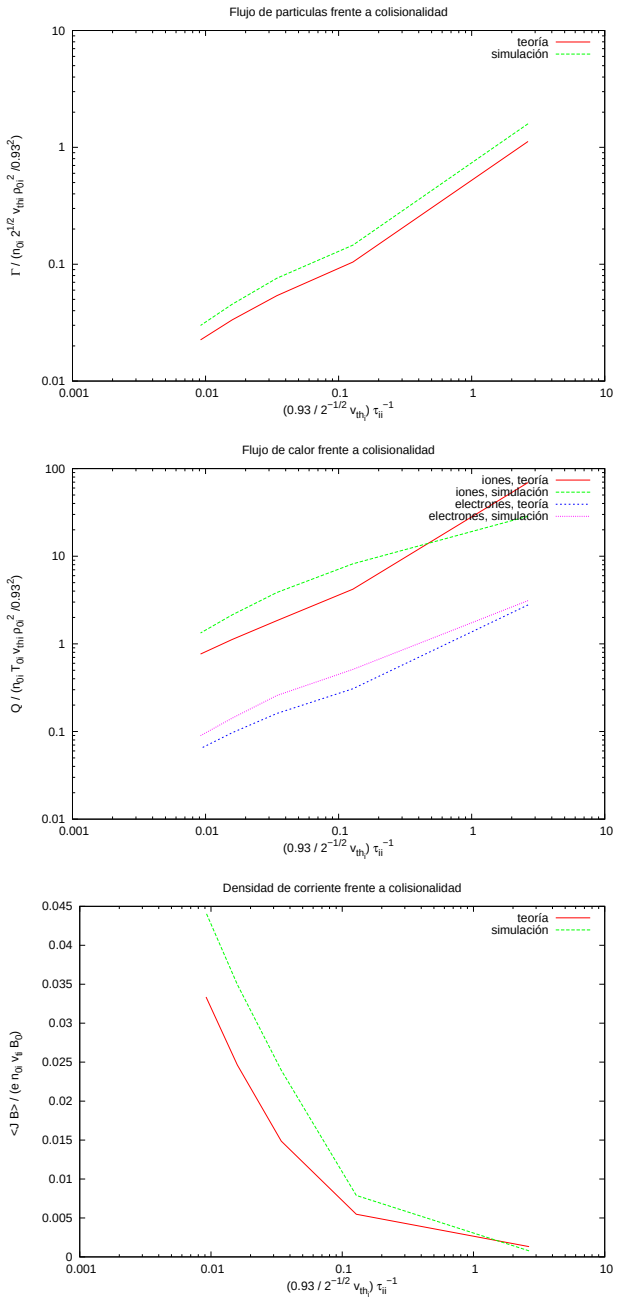

Figura 18: De arriba a abajo y en función de la colisionalidad: flujo de partículas, flujos de calor iónico y electrónico, y corriente; evaluados en $\rho = 0{,}46$.

de los flujos con la colisionalidad, algo bien conocido en el caso axisimétrico [9]. Para observar el régimen de "plateau" es necesario añadir simulaciones a menor colisionalidad que las estudiadas en este capítulo, algo que se deja para el futuro. Sin embargo es de destacar que usando las mismas unidades y radio medio que en la Ref. [8] se obtiene un resultado muy semejante en las colisionalidades exploradas.

6. Conclusión

El código de transporte basado en la evolución de la ecuación cinética de deriva [1, 2] se ha adaptado a las condiciones típicas de la teoría neoclásica estándar [9]: se han construido mallas espaciales basadas en un campo magnético axisimétrico sencillo y se han calculado los flujos de partículas y calor y la densidad de corriente toroidal en promedio a las superficies magnéticas. Se encuentra un acuerdo aceptable tanto con las expresiones teóricas como con los cálculos realizados con otro código [8] para todas las magnitudes.

Referencias

[1] J. M. Reynolds, D. López-Bruna, *Cálculo numérico del transporte mediante la ecuación cinética de deriva para plasmas en geometría magnética toroidal: preliminares*, Informes Técnicos Ciemat 1165, mayo 2009.

[2] J. M. Reynolds, D. López-Bruna, *Cálculo numérico del transporte mediante la ecuación cinética de deriva para plasmas en geometría magnética toroidal: aspectos numéricos*, Informes Técnicos Ciemat 1172, julio 2009.

[3] R. J. Bickerton, *et al*, Nature Phys. Sci. **229**, 110 (1971).

[4] K. Itoh, S.-I. Itoh, A. Fukuyama, *Steady state tokamak sustained by bootstrap current without seed current*, Research report NIFS Series, NIFS-159, (1992).

[5] J. P. Freidberg, *Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems*, Rev. Mod. Phys. **54** 801 (1982).

[6] P. Helander, D. J. Sigmar, *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*, Cambridge University Press, ISBN: 0-521-80798-0 (2002).

[7] K. Nishikawa, M. Wakatani, *Plasma physics*, Springer Series on Atoms and Plasmas, ISBN 3-540-65285-X (2000).

[8] E. A. Belli, J. Candy, *Kinetic calculation of neoclassical transport including self-consistent electron and impurity dynamics* Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 095010, (2008).

[9] F. L. Hinton, R. D. Hazeltine, *Theory of plasma transport in toroidal confinement systems*, Rev. Mod. Physics **48**(2), 239, (1976).

[10] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, part 1. Classical transport theory*, North Holland 1988.

[11] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, part 2. Neoclassical transport theory*, North Holland 1988.

[12] H. J. de Blank, *Guiding center motion*, Trans. Fusion Sci. Technol., **45**, 47–54 (2004).

[13] H. K. Wimmel, *Consistent guiding center drift theories*, J. Phys. Sci. **37**(9), 985–999 (1982); Z. Naturforsch. **38**A, 341 (1982).

[14] M. Taguchi, *Neoclassical heat flux due to poloidal electric field in arbitrary collisionality regime*, Plasma Phys. Control. Fusion **35**, 193 (1993).

[15] T.E. Stringer, *Inclusion of poloidal potential variation in neoclassical transport*, Phys. Fluids B **3**(4), 981 (1991).

[16] L. M. Kovrizhnikk, *Whether diffusion in axisymmetric confinement systems iis intrinsically ambipolar*, Comm. Mod. Phys. E **18** (3), 187–200 (1997).

[17] J. Y. Ji, E. D. Held, *Exact linearized Coulomb collision operator in the moment expansion*, Phys. Plasmas **13**, 102103 (2006).

[18] A. H. Boozer *et al.*, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982* (Proc. 9th Int. Conf. Baltimore, 1982), Vol. III, p. 129, IAEA, Vienna (1983).