J. E. N. 317
Sp ISSN 0081-3397

Elementos de Teoría Cinética de plasmas.

por
J. Guasp

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MADRID, 1976

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesauro del INIS para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. Para más detalles consultese el informe IAEA-INIS-12 (INIS: Manual de Indización) y IAEA-INIS-13 (INIS: Thesauro) publicado por el Organismo Internacional de Energía Atómica.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Octubre de 1975.

Depósito legal nº M-7761-1976 I.S.B.N. 84-500-7451-7

ELEMENTOS DE TEORIA CINETICA DE PLASMAS.

INTRODUCCION

PARTE 1ª . ECUACIONES CINETICAS.

1. FUNCION DE DISTRIBUCION DE N PARTICULAS. ECUACION DE LIOUVILLE.

2. FUNCIONES DE DISTRIBUCION REDUCIDAS.

3. JERARQUIA DE ECUACIONES DE BBGKY.

4. FUNCIONES DE CORRELACION.

5. DESARROLLO EN ORDENES DE g.

6. ECUACIONES DE ORDEN CERO Y ORDENES SUPERIORES. ECUACIONES DE VLASOV Y COLISIONAL.

   6.1. Orden cero. Ecuación de Vlasov
   6.2. Ecuación colisional.

7. FORMAS DEL TERMINO DE COLISION.

   7.1. Ecuación de Boltzmann
   7.2. Fokker-Planck.
   7.3. Landau y Lennard-Balescu.
   7.4. Modelo de Krook.

8. PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES CINETICAS.

   8.1. Propiedades de la ecuación de Vlasov
   8.2. Propiedades del término colisional.
   8.3. Propiedades de la ecuación colisional.

PARTE 2ª. ECUACIONES MACROSCOPICAS.

9. DEFINICION DE LOS MOMENTOS.

   9.1. Momentos de orden cero. Densidades
   9.2. Momentos de orden uno. Velocidad media
   9.3. Momentos de orden dos. Presión y temperatura
   9.4. Momentos de orden tres. Flujo de calor.

10. ECUACIONES DE LOS MOMENTOS.

10.1. Ecuación de continuidad.
10.2. Ecuación del movimiento.
10.3. Ecuación de la energía

11. ECUACIONES DE DOS FLUIDOS.

11.1. Plasma frio ("Cold")
11.2. Plasma templado ("warm")

12. ECUACIONES DE UN FLUIDO.

12.1. Momentos
12.2. Ecuaciones de los momentos
12.3. Ley de Ohm
12.4. Ecuación de conservación de la energía
12.5. Ecuaciones de la MHD
12.6. Teoría adiabática doble

13. RESUMEN SOBRE LA VALIDEZ DE LAS DIVERSAS APROXIMACIONES. CONCLUSION.

13.1. Condiciones de validez de las aproximaciones.
13.2. Conclusión.

14. REFERENCIAS.

INTRODUCCION

Dentro de la serie de seminarios sobre Física del Plasma y de la Fusión, se desarrolló durante el verano de 1975 el tema de Elementos de Teoría Cinética de Plasmas, que se reproduce en este escrito. Su objetivo fundamental consiste en exponer las bases físicas de las ecuaciones de Vlasov y del plasma colisional (§§ 1 - 8), así como la obtención de las ecuaciones macroscópicas (§§ 9 - 13), sirviendo de etapa previa al estudio de propagación de ondas, inestabilidades y obtención de coeficientes de transporte.

PRIMERA PARTE. ECUACIONES CINETICAS.

1. FUNCION DE DISTRIBUCION DE N PARTICULAS. ECUACION DE LIOUVILLE.

El tratamiento más detallado para un plasma, cf. [5], [6], consiste en las ecuaciones del movimiento de las N partículas que lo constituyen junto con las del campo, es decir las ecuaciones de Hamilton de las partículas en el seno de los campos electromagnéticos y las de Maxwell con fuentes dadas por las propias partículas. Este tratamiento es, evidentemente, imposible de realizar:

a) Por no saber resolver las ecuaciones de las N partículas y sus campos.

b) Por incapacidad de conocer las condiciones iniciales precisas de esas N partículas.

c) Por limitación en la resolución de los aparatos de medida.

Las limitaciones (b) y (c) fuerzan a una descripción estadística.

En esta exposición supondremos un plasma formado por varios componentes (por ej. electrones e iones de varios tipos), las partículas pertenecientes a cada componente estarán caracterizadas por un valor de la carga q_α y de su masa m_α y serán indistinguibles. Si N_α es el número total de partículas pertenecientes al componente α, el número total N de partículas del plasma será

$$N = \sum_\alpha N_\alpha$$

y lo supondremos globalmente neutro

$$\sum_\alpha q_\alpha N_\alpha = 0$$

También supondremos todos sus átomos ionizados (ausencia de partículas neutras) e ignoraremos efectos relativistas y cuánticos.

Cuando no sea indispensable se prescindirá del subindice α y nos limitaremos a un solo componente.

La descripción estadistica completa de un plasma se realiza mediante la función de distribución F_N de las N partículas.

Por definición:

$$F_N\left(\vec{X}_{1\alpha}, \vec{v}_{1\alpha}, \vec{X}_{2\alpha}, \vec{v}_{2\alpha}, \ldots, \vec{X}_{N\alpha}, \vec{v}_{N\alpha}; \vec{X}_{1\beta}, \vec{v}_{1\beta}, \ldots, \vec{X}_{N\omega}, \vec{v}_{N\omega}; t\right) \cdot$$

$$\cdot\, d^3X_{1\alpha}\, d^3v_{1\alpha} \cdots d^3X_{N\omega}\, d^3v_{N\omega} \qquad (1.1)$$

es la probabilidad de que en el instante t una de las partículas de tipo α - (cualquiera) esté situada en el elemento de volumen $d^3X_{1\alpha}\, d^3v_{1\alpha}$ centrado alrededor del punto de posición $\vec{X}_{1\alpha}$ y velocidad $\vec{v}_{1\alpha}$, que otra partícula, diferente pero tambien de tipo α, lo esté en el elemento de volumen $d^3X_{2\alpha}\, d^3v_{2\alpha}$, otra de tipo β en $d^3X_{1\beta}\, d^3v_{1\beta}$, etc ...

Evidentemente F_N ha de ser simétrica en las coordenadas de posición y velocidad de todas las particulas del mismo tipo. Además, para que F_N represente efectivamente una densidad de probabilidad, debe permanecer no negativa en todo el espacio de definición y estar normalizada a la unidad.

$$F_N \geq 0$$

$$\int F_N\, d^3X_{1\alpha}, \ldots, d^3v_{N\omega} = 1 \qquad (1.2)$$

Para el caso particular de equilibrio termodinámico, F_N es la función de Gibbs, producto de funciones de Maxwell-Boltzmann. ($\mathcal{L}$ § 5) [7].

Se demuestra en Mecánica Clásica, $\mathcal{L}$. [4], [8], que F_N obedece a la ecuación de Liouville

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{X}_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{X}_i} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{p}_i} = 0 \qquad (1.3)$$

Siendo H el Hamiltoniano del sistema de N partículas. Las ecuaciones del movimiento serán

$$\vec{v}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \qquad\qquad \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}_i}$$

por lo tanto (1.3) no es sino

$$\frac{dF_N}{dt} = 0 \tag{1.4}$$

la derivada total respecto al tiempo de F_N es nula.

La justificación de esta ecuación se debe a que en Mecánica Clásica se demuestra, cf. [4] [8], que el volumen de un recinto del espacio de fases es invariante bajo las ecuaciones del movimiento, es decir cuando sus puntos siguen las trayectorias de las partículas. F_N es la densidad de puntos representativos del conjunto estadístico en el espacio de fases, el número total de esos puntos debe permanecer constante cuando estos describen las trayectorias, pues los sistemas no aparecen ni desaparecen. Por lo tanto, considerando un recinto de volumen infinitesimal, como tanto el valor del volumen como el número total de puntos permanecen constantes, debe mantenerse también constante la densidad F_N a lo largo de las trayectorias, y esto constituye, precisamente, la Ecuación de Liouville (1.4), que no es sino una ecuación de continuidad en el espacio de fases.

La Hamiltoniana de un plasma es muy complicada, para simplificar, se van a ignorar los efectos relativistas y de retardo de las potenciales y también se ignorarán, de momento, los efectos magnéticos internos, que serán simplemente añadidos en el resultado final, cf. [2] [3] con ello solo las acciones electrostáticas y de los campos externos serán tenidas en cuenta y las ecuaciones del movimiento quedan entonces:

$$m_i \vec{a}_i = q_i \left[\vec{E}_{ex}(\vec{x}_i, t) + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}_{ex}(\vec{x}_i, t) \right] - \sum_{j=1 \neq i}^{N} q_i q_j \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \left(\frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right) \tag{1.5}$$

$$\vec{E}_{ex} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \phi_{ex}(\vec{x}, t)$$

Siendo $\vec{a}_i$ la aceleración de la partícula i, $\vec{E}_{ex}$, $\vec{B}_{ex}$ y ϕ_{ex} los campos y el potencial externos y habiendose utilizado unidades gaussianas.

Con esto la ecuación de Liouville queda

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{x}_i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} = 0 \qquad (1.6)$$

que permitirá, en principio, calcular la evolución de F_N a partir de una forma inicial dada.

Puede demostrarse, [10] , que la ecuación de Liouville es compatible con las propiedades de no negatividad, normalizacion a la unidad y simetría (1.2). Si la distribución inicial posee esas propiedades, F_N las mantiene a lo largo del tiempo.

2. FUNCIONES DE DISTRIBUCION REDUCIDAS.

La función F_N requiere un excesivo conocimiento del sistema, conviene recurrir a distribuciones estadísticas reducidas que impliquen menor número de partículas. Estas funciones de distribución reducidas suprimen parte de la información del sistema pero, a cambio, son más manejables.

Así, se define la función de distribución de una sola partícula de tipo α mediante:

$$f_\alpha^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) = V \int F_N(\vec{x}, \vec{v}, \ldots, \vec{x}_N, \vec{v}_N)\, d^3x_2\, d^3v_2 \ldots d^3x_N\, d^3v_N \tag{2 1}$$

(recuerdesé la simetría de F_N)

V es el volumen espacial del plasma

Con ello

$$\frac{1}{V} f_\alpha^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t)\, d^3x\, d^3v$$

es la probabilidad de encontrar una partícula de tipo α (cualquiera) en el elemento de volumen $d^3x\, d^3v$, centrado alrededor del punto de posición $\vec{x}$ y velocidad $\vec{v}$, independientemente de donde se encuentren todas las demás.

O, de otra manera, si $\bar{n}_\alpha$ es la densidad global de partículas de tipo α

$$\bar{n}_\alpha = \frac{N_\alpha}{V}$$

entonces

$$\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t)\, d^3x\, d^3v$$

es el número de partículas de tipo α en el elemento de volumen citado anteriormente.

Se observará que en virtud de la normalización a 1 de F_N (1.2) y de la definición (2.1), $f_\alpha^{(1)}$ se encuentra normalizada a $\underline{V}$

$$\int f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3x\, d^3v = V$$

La función de distribución de dos partículas $f_{\alpha\beta}^{(2)}$ se define mediante

$$f_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t) = V^2 \int F_N\, d^3x_{2\alpha}\, d^3v_{2\alpha} \overbrace{\cdots}^{N-2} d^3x_N\, d^3v_N$$

es decir integrando sobre las coordenadas de todas las partículas salvo dos.

$$\frac{1}{V^2}\, d^3x\, d^3v\, d^3x'\, d^3v'\, f_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t)$$

es la probabilidad combinada de encontrar una partícula de tipo $\underline{\alpha}$ en $d^3x\, d^3v$ y simultaneamente otra (<u>distinta</u>) de tipo β en $d^3x'\, d^3v'$

Si el tipo $\underline{\alpha}$ coincide con el $\underline{\beta}$ es evidente que $f_{\alpha\alpha}^{(2)}$ será simétrica.

Analogamente la función de distribución de $\underline{s}$ partículas (s) se obtendrá integrando F_N sobre las N - s partículas restantes y multiplicando por V^s. Esta función se encontrará normalizada a V^s.

No hay uniformidad en las definiciones para estas funciones entre los diversos autores, la normalización utilizada aquí (a V^s para $f^{(s)}$) es la más útil y corresponde a la de las referencias [5], [7] , [10] y, parcialmente, [3].

Como se verá en la obtención de las ecuaciones macroscópicas (§ 9) las magnitudes medibles dependen exclusivamente de $f^{(1)}$

P. ej. la densidad de partículas de tipo $\underline{\alpha}$ viene dada por (9.2)

$$n_\alpha(\vec{x},t) = \int \bar{n}_\alpha\, f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \qquad (2.3)$$

la velocidad media de las particulas $\underline{\alpha}$, por (9.5)

$$\vec{u}_\alpha(\vec{x},t) = \frac{\int \vec{v}\, f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v}{\int f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v} = \frac{\bar{n}_\alpha}{n_\alpha(\vec{x},t)} \int \vec{v}\, f_\alpha^{(1)}\, d^3v \qquad (2.4$$

etc...

3. JERARQUIA DE ECUACIONES DE BBGKY (BOGOLYUBOV, BORN, GREEN, KIRKWOOD, YVON).

Se trata ahora de encontrar las ecuaciones que rigen para las funciones de distribución reducidas $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc partiendo de la ecuación de Liouville (1.6) para F_N

Para simplificar la obtención se supondrá <u>un solo componente</u>.

Para encontrar esas ecuaciones se integra (1.6) sobre las variables de todas las partículas menos <u>s</u> y se multiplica por V^s

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(s)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \ldots, \vec{x}_s, \vec{v}_s, t) + \sum_{i=1}^{s} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{x}_i} +$$

$$+ V^s \sum_{i=s+1}^{N} \int \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{x}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} V^s \int \vec{a}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{x}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N = 0 \qquad (3.1)$$

Pero por el teorema de Gauss

$$\int_V \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{x}_i} \, d^3x_i = \int_V \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \cdot \left(\vec{v}_i F_N\right) d^3x_i = \int_S \vec{v}_i F_N \cdot d\vec{S}_i = 0 \qquad (3.2)$$

ya que esta integral de superficie se anula si F_N decrece con rapidez suficiente a grandes valores de $\vec{x}_i$, es decir si

$$\lim_{|\vec{x}_i| \to \infty} x_i^2 \, F_N = 0$$

cosa que queda garantizada si el plasma permanece confinado en un volumen finito o, simplemente, a causa de la normalización finita de F_N, es decir de la convergencia de la integral

$$\int F_N \, d^3x_i$$

Como en virtud de (1.5)

$$\vec{a}_i = \frac{q_i}{m_i}\left[\vec{E}_{ex}(\vec{x}_i, t) + \frac{\vec{v}_i}{c} \times B(\vec{x}_i, t)\right] - \sum_{j=1 \neq i}^{N} \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \phi_{ij}$$

$$= \vec{a}_i^{(E)}(\vec{x}_i, \vec{v}_i, t) + \vec{a}_i^{(I)}(\vec{x}_i, \vec{v}_i, t) \qquad (3.3)$$

donde el superíndice (E) se refiere a los campos externos y el (I) a los internos y

$$\phi_{ij} = \frac{q_i \, q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Se tendrá entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \int \vec{a}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N = \sum_{i=1}^{s} \int \vec{a}_i^{(E)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N$$

$$+ \sum_{i=s+1}^{N} \int \vec{a}_i^{(E)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N + \sum_{i=1}^{N} \int \vec{a}_i^{(I)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N$$

El segundo sumatorio consiste en términos del tipo

$$I_i = \int \vec{a}_i^{(E)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3 v_i \, .$$

con $i \geqslant s + 1$, en virtud de (3.3) resulta

$$I_i = \frac{q_i}{m_i} \int \vec{E}(\vec{x}_i, t) \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3 v_i + \frac{q_i}{m_i c} \int \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i) \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3 v_i$$

$$= \frac{q_i}{m_i} \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left(F_N \, \vec{E}(\vec{x}_i, t) \right) d^3 v_i - \vec{B}(\vec{x}_i) \times \frac{q_i}{m_i c} \int \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3 v_i$$

El primer término se anula por el teorema de Gauss si

$$\lim_{|\vec{v}_i \to \infty|} F_N \, v_i^2 = 0$$

el segundo término, habida cuenta de que en un producto mixto las componentes de los tres vectores han de ser distintas, resulta

$$I_i = \frac{q_i}{m_i c} \vec{B}(\vec{x}_i) \times \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot (\vec{v}_i \, F_N) \, d^3 v_i = 0$$

que se anula por el Teorema de Gauss si

$$\lim_{|\vec{v}_i| \to \infty} v_i^3 \, F_N = 0$$

Ambas condiciones quedan garantizadas por la normalización finita de F_N que implica la convergencia de integrales del tipo

$$\int F_N \, d^3 v_i$$

Por consiguiente I_i $(i \geqslant s+1) = 0$, es decir $\vec{a}_i^{(E)}$ contribuye sólo para $i \leqslant s$ en que

$$V^s \sum_{i=1}^{s} \vec{a}_i^{(E)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N = \sum_{i=1}^{s} \vec{a}_i^{(E)}(\vec{x}_i, \vec{v}_i, t) \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{v}_i}$$

Por otro lado, las contribuciones internas

$$J \equiv V^s \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \vec{a}_{ij}^{(I)}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N$$

con $$\vec{a}_{ij}^{(I)} \equiv \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \phi_{ij}$$

Si $i \geqslant s+1$ procediendo como en el caso anterior (con $\vec{a}_i^{(E)}$) y utilizando el teorema de Gauss se obtiene contribución nula, por lo que queda.

$$J = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1 \neq i}^{s} \vec{a}_{ij}^{(I)}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{v}_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{N} \frac{1}{V^s} \int \vec{a}_{ij}^{(I)} \cdot \frac{\partial F_N}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \cdots d^3v_N =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{s} \vec{a}_{ij}^{(I)} \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{v}_i} + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int \vec{a}_{i,s+1}^{(I)} \cdot \frac{\partial f^{(s+1)}}{\partial \vec{v}_i} \, d^3x_{s+1} \, d^3v_{s+1}$$

donde para el último término se ha hecho uso de la propiedad de simetría (recuerdese que se ha tomado, por simplicidad, un solo componente)

Con todo ello (3.1) queda

$$\frac{\partial f^{(s)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{x}_i} + \sum_{i=1}^{s} \langle \vec{a}_i \rangle \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \vec{v}_i} -$$

$$- \frac{(N-s)}{V m_i} \sum_{i=1}^{s} \int \frac{\partial \phi_{i,s+1}}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial f^{(s+1)}}{\partial \vec{v}_i} d^3x_{s+1}\, d^3v_{s+1} = 0 \qquad (3.4)$$

donde

$$\langle \vec{a}_i \rangle = \frac{q_i}{m_i} \left[\vec{E}_{ex}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}(\vec{x}_i, t) \right] -$$

$$- \sum_{j=1 \neq i}^{s} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \vec{x}_i} \frac{1}{m_i}$$

y

$$\phi_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Los tres primeros términos de (3.4) son idénticos a la ecuación de Liouville para s electrones y hacen aparecer solamente a $f^{(s)}$, en el cuarto en cambio aparece $f^{(s+1)}$.

Conviene escribir explícitamente las ecuaciones (3.4) correspondientes a los ordenes más bajos.

Así para s = 1 se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{q}{m} \left[\vec{E}_{ex}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{ex}(\vec{x}, t) \right] \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{v}}$$

$$- \frac{N-1}{m V} \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{q^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[f^{(2)}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{x}', \vec{v}', t) \right] d^3x'\, d^3v' = 0$$

(3.5)

mientras que para s = 2

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(2)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t) + \vec{v}\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{x}} + \vec{v}'\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{x}'} + \frac{q}{m}\left[\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right]\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{v}}$$

$$+\frac{q}{m}\left[\vec{E}'+\frac{\vec{v}'}{c}\times\vec{B}'\right]\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{v}'} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{v}'} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{v}} - \frac{(N-2)}{mV}\int\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left[f^{(3)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',\vec{x}'',\vec{v}'',t)\right]d^3x''d^3v'' -$$

$$-\frac{(N-2)}{mV}\int\frac{\partial}{\partial \vec{x}'}\left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{v}'}\left[f^{(3)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',\vec{x}'',\vec{v}'')\right]d^3x''d^3v'' = 0 \qquad (3.6)$$

etc.

De esta manera que cada vez se complican más las ecuaciones. En esa serie de ecuaciones, denominadas jerarquía de BBGKY (Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon), la correspondiente a $f^{(s)}$ hace aparecer también a $f^{(s+1)}$ por lo que esa serie no se cierra más que para s = N en que $f^{(N)}$ obedece a la misma ecuación de Liouville (1.6) que F_N. Aparentemente no se ha ganado nada en el paso de F_N a las funciones de distribución reducidas.

Sin embargo se verá que, bajo hipótesis más o menos plausibles, la serie de ecuaciones puede limitarse a una o, a lo más, dos de ellas.

Para el caso de varios componentes la primera ecuación adopta la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t) + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}_{ex}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}_{ex}\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}} =$$

$$= \sum_\beta \frac{\bar{n}_\alpha}{m_\alpha}\int\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left[f_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t)\right]d^3x'd^3v' \qquad (3.7)$$

donde se ha supuesto $N_\alpha \gg 1$.

4. FUNCIONES DE CORRELACION.

Para efectuar el corte de la serie de ecuaciones de BBGKY conviene definir las funciones de correlación.

Utilizando la notación obvia

$$f_\alpha^{(1)}(1) = f_\alpha^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) \qquad \text{etc.}$$

se definen así:

$$f_{\alpha\beta}^{(2)}(1,2) = f_\alpha^{(1)}(1)\, f_\beta^{(1)}(2) + P_{\alpha\beta}(1,2) \tag{4.1}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(1,2,3) = f_\alpha^{(1)}(1)\, f_\beta^{(1)}(2)\, f_\gamma^{(1)}(3) + f_\alpha^{(1)}(1)\, P_{\beta\gamma}(2,3) + f_\beta^{(1)}(2)\, P_{\alpha\gamma}(1,3) + f_\gamma^{(1)}(3)\, P_{\alpha\beta}(1,2) + T_{\alpha\beta\gamma}(1,2,3)$$

etc.

$P_{\alpha\beta}$ es la función de correlación de dos partículas, $T_{\alpha\beta\gamma}$ la de tres, etc...

Si las dos partículas de $f^{(2)}$ fueran independientes, su probabilidad combinada sería simplemente el producto de las probabilidades individuales $f^{(1)}$ y, por lo tanto, $f^{(2)}$ se factorizaría, con lo que, $\mathcal{E}$.(4.1), $P_{\alpha\beta}$ sería nula. Por esta razón se denomina a P. función de correlación de dos partículas ya que da idea del apartamiento de la independencia.

Para el caso de equilibrio termodinámico la función $f_\alpha^{(1)}$ es maxwelliana (5.1), [7].

$$f_\alpha^{(1)}(\vec{v}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2KT}} \equiv f_{M_\alpha}(1)$$

mientras que $P_{\alpha\beta}$ adopta la forma (5.2)

$$P_{\alpha\beta}(1,2) = -f_{M\alpha}(1)\, f_{M\alpha}(2)\, \frac{q_\alpha q_\beta}{kT}\, \frac{1}{r_{12}}\, e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_D}} \quad , \left(r_{12} \geq \frac{8\pi e^2}{kT} \right)$$

donde $\quad r_{12} = |\vec{X}_1 - \vec{X}_2|$

y $\quad \lambda_D$ es la longitud de Debye

$$\lambda_D = \left[\sum_\alpha \left(\frac{4\pi \bar{n}_\alpha q_\alpha^2}{kT} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Como se observará $P_{\alpha\beta}$ decrece exponencialmente con la distancia de separación entre las partículas, tomando valores apreciables solamente para distancias inferiores a una longitud de Debye λ_D . Además P es negativa para partículas de la misma carga mostrando así el efecto de la repulsión, cf (4.1), mientras que para cargas opuestas es positiva mostrando entonces el efecto de la atracción. Estas propiedades de P en equilibrio termodinámico se mantienen con poca alteración fuera de él.

Es conveniente escribir las primeras ecuaciones de la jerarquía BBGKY en función de estas funciones de correlación, así la primera de todas resulta (se vuelve nuevamente a un solo componente) considerando que N ≫ 1

$$\frac{\partial f^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{q}{m}\left[\vec{E}_{ex} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{ex} \right]\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{v}} =$$

$$= \frac{\bar{n}}{m}\left[\int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) f^{(1)}(\vec{x}',\vec{v}',t)\, d^3x'\, d^3v' \right]\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{v}} =$$

$$= \frac{\bar{n}}{m} \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{q^2}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right)\cdot\frac{\partial P(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t)}{\partial \vec{v}}\, d^3x'\, d^3v' \qquad (4.2)$$

esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\frac{Df^{(1)}}{Dt} + \frac{q}{m}\left[\vec{E}^{T}(\vec{x},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}_{ex}(\vec{x},t)\right]\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} = C\{P\} \qquad (4.3)$$

donde

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{x}}$$ es la derivada convectiva

y

$$E^{T} = \vec{E}_{ex} + \langle\vec{E}\rangle$$

$$\langle\vec{E}(\vec{x},t)\rangle = -\bar{n}\int\left[\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right] f^{(1)}(\vec{x}',\vec{v}',t)\,d^3x'\,d^3v'$$

o, en otras palabras

$$\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot\langle\vec{E}(\vec{x},t)\rangle = 4\pi\bar{n}q\int f^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\,d^3v \equiv 4\pi q(\vec{x},t)$$

$$\mathrm{rot}\,\langle\vec{E}\rangle = 0$$

Por lo tanto $\langle\vec{E}\rangle$ no es otra cosa que el campo eléctrico creado por la densidad de carga macroscópica $q(\vec{x}, t)$ <u>prescindiendo de todo tipo de correlaciones</u>, es el campo eléctrico macroscópico, también denominado autoconsistente.

$C\{P\}$ es el segundo miembro de (4.2)

Para el caso de varios componentes, añadiendo los efectos magnéticos internos, ignorados anteriormente, la ecuación aparece ahora en la forma [2], [6].

$$\frac{Df_{\alpha}^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)}{Dt} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}^{T}(\vec{x},t)\right]\cdot\frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial\vec{v}} = C_{\alpha}\{P_{\alpha\beta}\} \qquad (4.4)$$

con
$$\vec{E}^T = \vec{E}_{ex} + \langle \vec{E} \rangle \quad , \quad \vec{B}^T = \vec{B}_{ex} + \langle \vec{B} \rangle$$

y los campos internos obedecen a las ecuaciones de Maxwell con fuentes dadas por las densidades de carga y corrientes macroscópicas.

$$\nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = 4\pi q(\vec{x},t) = \sum_\beta \bar{n}_\beta q_\beta \int f_\beta^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v$$

$$\nabla \times \langle \vec{E} \rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t}$$

$$\nabla \times \langle \vec{B} \rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \vec{E} \rangle + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x},t)$$

$$\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \sum_\beta \bar{n}_\beta q_\beta \int \vec{v}\, f_\beta^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v$$

(4.4) es la ecuación del plasma colisional, $\langle \vec{E} \rangle$ y $\langle \vec{B} \rangle$ los campos macroscópicos. C_α el término colisional (ahora notablemente más complicado que en el caso puramente electrostático) [6].

Como se observará $f_\alpha^{(1)}$ obedece a una ecuación de Liouville con un segundo término que depende de las funciones de correlación binarias $P_{\alpha\beta}$. El campo que aparece en el operador de Liouville es el externo más el macroscópico, $\langle \vec{E} \rangle$ y $\langle \vec{B} \rangle$, que verifica las ecuaciones de Maxwell con densidades de carga y corriente iguales a las macroscópicas, <u>ignorando todo tipo de correlaciones</u>. La denominación de <u>autoconsistente</u> para ese campo se debe a que sus fuentes dependen de la función de distribución $f^{(1)}$ y esta, a su vez, depende de los campos, a través de la ecuación cinética (4.4), por tanto ambos deben ser calculados simultaneamente de una manera consistente.

El término $C_\alpha\{P_{\alpha\beta}\}$ denominado "<u>de colisión</u>" da cuenta de los efectos de correlación, el calificativo de "colisional" (en rigor impropio) se debe al hecho de que P solo presenta valores apreciables para distancias pequeñas entre las partículas, por lo que ese término dará cuenta de interacciones con pequeño parámetro de impacto y, por lo tanto, procesos que dan lugar a grandes desviaciones en las trayectorias de las partículas, eso es lo que habitual

mente se denomina como una "colisión" en contraste con las pequeñas desviaciones que producen los campos macroscópicos (que son de variación suave).

5. DESARROLLO EN ORDENES DE g.

De las ecuaciones (4.2) o (4.4) se aprecia que se lograría una gran simplificación si se tuviera

$$P_{\alpha\beta} << f_{\alpha}^{(1)}(1)\, f_{\beta}^{(1)}(2)$$

$$T << f^{(1)} P$$

etc.

Puede demostrarse que en situación de <u>equilibrio termodinámico</u>, en un plasma uniforme, [7]:

$$f_{\alpha}^{(1)}(\vec{v}) = f_M(\vec{v}) \equiv \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2kT}} \tag{5.1}$$

y

$$P_{\alpha\beta}(1,2) = -f_M(1)\, f_M(2)\, \frac{q_1 q_2}{kT r_{12}}\, e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_D}} \tag{5.2}$$

$$r_{12} \geq \frac{8\pi e^2}{kT} \quad , \quad r_{12} = |\vec{X}_1 - \vec{X}_2|$$

siendo

$$\lambda_D = \left[\sum_{\alpha} \left(\frac{4\pi\, \bar{n}_\alpha\, q_\alpha^2}{k\, T_\alpha}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

la <u>longitud de Debye</u> para un plasma de varias componentes, cada una de las cuales posee una temperatura T_α.

Para el caso, importante, de un plasma hidrogenoide de dos componentes (electrones e iones($\bar{n}_e = \bar{n}_i$)) a la misma temperatura, la longitud de Debye vale

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{8\pi\, \bar{n}_e\, e^2}\right)^{1/2}$$

y numéricamente

$$\lambda_D(cm) = 4.88 \left[\frac{T(^{\circ}K)}{n(cm^{-3})} \right]^{1/2} \tag{5.4}$$

mientras que para el caso de un plasma de un solo componente (p. ej. el gas de electrones de un metal).

$$\lambda_{D_e} = \left(\frac{kT}{4\pi \bar{n} e^2} \right)^{1/2}$$

λ_D es una longitud característica fundamental del plasma, es también la distancia de apantallamiento de los potenciales de las partículas. Algunos valores de esta magnitud aparecen en la Tabla 5.1 para plasmas de diversas características.

Volviendo al caso de equilibrio termodinámico, se tiene (para un plasma hidrogenoide)

$$\frac{|P_{\alpha\beta}(1,2)|}{f_\alpha^{(1)}(1)\, f_\beta^{(1)}(2)} = \frac{q^2}{kT} \frac{e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_D}}}{r_{12}} = \frac{g^2}{8\pi} \frac{e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_D}}}{r_{12}/\lambda_D} \tag{5.5}$$

Siendo

$$g = \frac{1}{\bar{n}\lambda_D^3} \tag{5.6}$$

el parámetro del plasma, importante magnitud sin dimensiones. Según (5.6) es, esencialmente, la inversa del número de partículas contenidas en un volumen cúbico de lado λ_D. Es decir, según lo indicado para λ_D, la inversa del número de partículas que interaccionan simultaneamente, para la mayor parte de los plasmas este número es muy grande y, por lo tanto, g muy pequeño.

Para un plasma hidrogenoide se tiene

$$g = \frac{1}{\bar{n}_e \lambda_D^3} = \left(\frac{8\pi e^2}{kT} \right)^{3/2} \bar{n}_e^{1/2}$$

y numéricamente

$$g = \frac{1}{116}\left[\frac{\bar{n}_e\,(cm^{-3})}{(T\,(°K))^3}\right]^{1/2} \tag{5.6'}$$

También puede demostrarse que g es la relación entre la energía potencial media y la cinética [5] [7]. Valores característicos para g se encontrarán en la Tabla 5.1.

La importante relación (5.5) permite afirmar que, en equilibrio termodinámico, el cociente $\frac{|P|}{f^{(1)} f^{(2)}}$ es proporcional al parámetro del plasma g.

Además para $r_{12} = \lambda_D$ se tiene

$$\frac{|P_{\alpha\beta}|}{f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(1)}} = \frac{g}{8\pi} e^{-1} = 0.015\, g \quad , \quad (r_{12} = \lambda_D) \tag{5.7}$$

mientras que para

$$r_{12} = g\lambda_D = \frac{8\pi e^2}{kT} \tag{5.8}$$

(límite de validez de la forma sencilla (5.2)) se tiene para $g \ll 1$

$$\frac{|P_{\alpha\beta}|}{f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(1)}} = \frac{1}{8\pi} e^{-g} \approx 0.04 \quad , (r_{12} = g\lambda_D \, , g \ll 1) \tag{5.9}$$

Por lo tanto puede afirmarse que cuando

$$g \ll 1 \quad , \quad P_{\alpha\beta} \ll f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(1)}$$

para todo valor de $r_{12} \geq g\lambda_D$

Es decir $P_{\alpha\beta}$ es despreciable frente al producto $f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(1)}$ siempre que g lo sea frente a la unidad, además $P_{\alpha\beta}$ es proporcional a la primera potencia de g. Se dirá entonces, para abreviar, que P es "de orden g"

$$P \sim O(g) \tag{5.10}$$

o bien que P es de"orden 1 en g".

Analogamente se demuestra que, en equilibrio termodinámico, T es de orden dos

$$T \sim O(g^2) \tag{5.11}$$

En resumen, siempre que no busquemos efectos inferiores a la longitud

$$g \cdot \lambda_D = \frac{8\pi e^2}{kT}$$

podremos despreciar los términos en P o T frente a los que contienen $f^{(1)}$ y, además, las funciones de correlación elevadas, son despreciables frente a las de ordenes bajos.

Cabría pensar que cerca del equilibrio termodinámico se mantuviera la misma relación, pero esta afirmación no es más que una conjetura plausible que aún está sin demostrar. Lejos del equilibrio nada indica que esa proporción se mantenga y existe incluso evidencia de lo contrario (p. ej. cuando el nivel de fluctuaciones es elevado). Sin embargo, sí puede demostrarse con toda generalidad, el hecho de que las funciones de correlación binarias, ternarias, etc., son de orden 1 en g.

$$P \sim T \sim O(g) \tag{5.12}$$

Para ello es necesario efectuar un desarrollo de las funciones en serie de potencias de g.

$$f^{(1)} = f_0^{(1)} + g\, f_1^{(1)} + g^2 f_2^{(1)} + \cdots$$

$$P = P_0 + g\, P_1 + g^2 P_2 + \cdots$$

$$T = T_0 + g\, T_1 + g^2 T_2 + \cdots$$

etc.

desarrollo que sólo será útil cuando $g \ll 1$.

Para obtener las ecuaciones a que obedece cada orden conviene referir todas las magnitudes que intervienen en las ecuaciones cinéticas (3.4) a variables sin dimensiones. Así, todas las longitudes se medirán en unidades λ_D , todos los tiempos en la inversa de la frecuencia del plasma - $\frac{1}{\omega_p}$ (1) etc.

Resulta entonces,[2] [10], que P, T, y todas las funciones de correlación de ordenes superiores, carecen de término en orden cero en g, es decir

$$P_0 = T_0 = \dots = 0 \tag{5.13}$$

Por lo tanto puede afirmarse con toda generalidad que

$$P \sim O(g) \quad , \quad T \sim O(g) \qquad \text{etc.}$$

lo que ya no puede afirmarse es que T sea de orden superior a P.

El término de colisión C_α de la ecuación cinetica (4.4) que es lineal en P, tambien es de <u>orden uno en g</u>.

---

(1)

$$\omega_p^2 = \sum_\alpha \frac{4\pi \bar{n}_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha}$$ Para plasma hidrogenoide es

$$\omega_p (KHz) = 56\sqrt{\bar{n}_e (cm^{-3})}$$

TIPO DE PLASMA	$n_e (cm^{-3})$	T (°K)	ω_p (GHz)	λ_D (cm)	g	$\nu_c = g\omega_p$ (KHz)	$g\,\lambda_D$ (cm)
"Q - MACHINE"	10^{11}	2400	18	7.6×10^{-4}	0.02	4×10^{5}	1.5×10^{-5}
"ODE"	10^{10}	2×10^{5}	6	2×10^{-2}	10^{-5}	60	2×10^{-7}
TOKAMAK (T.F.R.)	7×10^{13}	10^{7}	468	1.8×10^{-3}	2.10^{-6}	936	3.10^{-9}
TERMONUCLEAR	10^{14}	10^{8}	600	5×10^{-3}	10^{-7}	60	5×10^{-10}

MAGNITUDES CARACTERISTICAS PARA DIVERSOS TIPOS DE PLASMAS.

TABLA 5.1

6. ECUACIONES DE ORDEN CERO Y DE ORDENES SUPERIORES. ECUACIONES DE VLASOV Y COLISIONAL.

6.1. Orden cero. Ecuación de Vlasov.

En orden cero en g, es decir cuando todas las potencias de g son despreciables frente a la unidad, tanto P como T serán a su vez despreciables frente a $f^{(1)}$, por consiguiente el término colisional de la ecuacion (4.4) también podra ser despreciado frente a los otros términos, quedando entonces la ecuación en la forma

$$\frac{\partial f^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \left(\vec{E}^{T} + \frac{\vec{v}}{c}\times B^{T}\right)\cdot\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (6.1)$$

$$\vec{E}^{T} = \vec{E}_{ex} + \langle \vec{E} \rangle \quad , \quad \vec{B}^{T} = \vec{B}_{ex} + \langle \vec{B} \rangle$$

$$\nabla\cdot\langle \vec{E} \rangle = 4\pi q(\vec{x},t)$$

$$\nabla\times\langle \vec{B} \rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial\langle \vec{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x},t)$$

$$\nabla\cdot\langle \vec{B} \rangle = 0 \qquad (6.2)$$

$$\nabla\times\langle \vec{E} \rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial\langle \vec{B} \rangle}{\partial t}$$

$$q(\vec{x},t) = \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \vec{v}\, f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v$$

que es la ecuación de Vlasov o de Boltzmann sin colisiones.

Para el caso de interacción interna electrostática, la ecuación se convierte en (cf. (4.2) sin término en P)

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}_{ex} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}_{ex}\right]\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}} -$$

$$-\frac{\bar{n}_\alpha}{m_\alpha}\left[\sum_\beta \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) f_\beta^{(1)}(\vec{x}',\vec{v}',t)\, d^3x'\, d^3v'\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}} = 0$$

Estas ecuaciones serán válidas cuando los efectos de orden g puedan ser despreciados. Es decir, cuando se traten de estudiar fenómenos que posean longitudes características muy superiores a $g\lambda_D$ o frecuencias muy superiores a $g\omega_p$. Así, para la propagación de ondas la ecuación de Vlasov será adecuada en el dominio de frecuencias $\underline{\omega}$ y longitudes de onda $\underline{\lambda}$ dado por

$$\boxed{\omega \gg g\,\omega_p \quad , \quad \lambda \gg g\lambda_D}$$

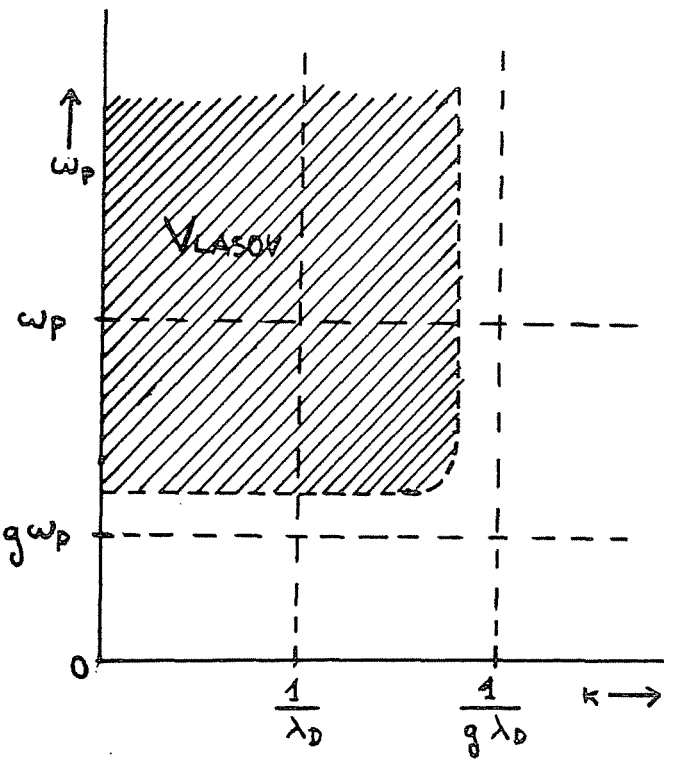

Fig. 6.1

que corresponde a números de ondas $\underline{k}$ inferiores a

$$k << \frac{1}{g\lambda_D}$$

ese dominio de validez aparece representado esquemáticamente en la Fig. 6.1

La frecuencia $\nu_c = g\omega_p$, en las cercanías de la cual cesa de ser válida la ecuacion sin termino colisional, es, en orden de magnitud igual a la frecuencia de colisión [1], se tiene

$$\nu_c\,(KHz) = 0.482\,\frac{\bar{n}_e\,(cm^{-3})}{[T(^{o}K)]^{3/2}}$$

su inversa define un tiempo medio de colisión

$$\tau_c \sim \frac{1}{g\omega_p}$$

fenómenos que sucedan durante intervalos de tiempo muy inferiores a τ_c podrán ser estudiados sin necesidad de introducir el término colisional es decir mediante la ecuación de Vlasov (6.1)

Esta ecuación será por tanto útil para el estudio de ondas de frecuencia elevada e inapropiada para aquellos en que las colisiones juegan un papel importante (ondas sónicas, magnetosónicas, etc.)

6.2. Ecuación colisional

Cuando se buscan efectos de orden superior a cero en g ya no puede despreciarse P ni T, la ecuación (4.4) mantiene su segundo miembro: el término colisional.Es decir

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}^T + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}^T\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}} = C_\alpha\{P\} \qquad (6.3)$$

junto con las ecuaciones de Maxwell (6.2)

Para el caso de interacción interna puramente electrostática, cf (4.2), el término colisional adopta la forma

$$C_\alpha\{P\} = \sum_\beta \frac{\bar{n}_\beta}{m_\alpha} \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial P_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t)}{\partial \vec{v}} d^3x' d^3v' ,$$

Esta expresión (6.4) puede ponerse en la forma

$$C_\alpha\{P\} = \sum_\beta \int \vec{a}_\beta(\vec{x},\vec{x}') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} P_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t) d^3x' d^3v'$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\sum_\beta \vec{J}_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{v},t) \right] \qquad (6.5)$$

siendo $\vec{J}_{\alpha\beta}$ una expresión vectorial <u>integrodiferencial lineal en $P_{\alpha\beta}$</u>

$$\vec{J}_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{v},t) = \frac{\bar{n}_\beta}{m_\alpha} \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) P_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{v},\vec{x}',\vec{v}',t) d^3x' d^3v'$$

Junto a (6.3) será necesaria ahora otra ecuación para $P_{\alpha\beta}$, derivada de (3.6), en la que aparecen $f^{(1)}$ y T en forma no lineal y muy complicada; a su vez será necesaria la ecuación para T y las funciones de correlación superiores. Es imposible resolver estas ecuaciones sin efectuar aproximaciones, el objetivo de éstas es despejar $P_{\alpha\beta}$ en función únicamente de las $f^{(1)}$ y trabajar, por tanto, con una sola ecuación cinética, las diversas aproximaciones conducirán a varias expresiones para el término colisional que serán citadas en el § 7.

7. FORMAS DEL TERMINO DE COLISION.

El resultado de "despejar" P en función de $f^{(1)}$ y sustituir en $C_\alpha\{P\}$ va a dar lugar a expresiones complicadas que, evidentemente, serán no lineales en $f^{(1)}$ pues como ya se ha indicado, la ecuación para P es no lineal. El rango de validez de las diversas formas depende, evidentemente, de las aproximaciones específicas.

Nos limitaremos aquí a enumerar, muy escuetamente, las formas más utilizadas; para mayor detalle debe recurrirse a las referencias [1] [5] [7] y [10].

7.1. Ecuación de Boltzmann.

Basado en colisiones binarias de corto alcance sin correlación, hace uso de una sección eficaz diferencial de dispersión y se obtiene un resultado similar al utilizado en el transporte de neutrones. Adolece de divergencias a corto y largo alcance.

7.2. Fokker-Planck.

Basado en la adición de colisiones sucesivas de pequeño ángulo. También adolece de divergencias para largo alcance. Es muy utilizada en el cálculo de coeficientes de transporte.

7.3. Landau y Lennard-Balescu.

Son dos formas diferentes, basadas en la resolución de la ecuación cinética de P, y su sustitución en $C_\alpha\{P\}$ bajo diversas aproximaciones (todas ellas implican ignorar T), dan lugar a expresiones muy complicadas.

En todas las formas citadas, el término de colisión posee la forma denominada de Fokker-Planck, en que

$$C_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{J}_\alpha \tag{7.1}$$

con

$$\vec{J}_\alpha = \sum_\beta \int Q_{\alpha\beta}(\vec{v},\vec{v}')\cdot\left[\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\vec{v}} - \frac{1}{m_\beta}\frac{\partial}{\partial\vec{v}'}\right] f_\alpha^{(1)}(\vec{v}) \cdot$$

$$\cdot f_\beta^{(1)}(v')\, m_\alpha\, \bar{n}_\beta\, d^3v' \qquad (7.2)$$

donde $Q_{\alpha\beta}$ es un tensor definido negativo cuya expresión explícita depende de cada caso concreto. Por lo tanto $\vec{J}_\alpha$ es una expresión <u>integrodiferencial no lineal en $f^{(1)}$</u>.

7.4. Modelo de Krook

Una forma semifenomenológica muy utilizada es la

$$C_\alpha = -\nu\left[f_\alpha^{(1)} - f_{\alpha 0}\right] \qquad (7.3)$$

donde ν es un parámetro fenomenológico del orden de la frecuencia de colisión (§ 6.1)

$$\nu \sim g\,\omega_p$$

y f_{α_0} es una distribución de equilibrio, de forma maxwelliana local

$$f_{\alpha 0} = \frac{n_\alpha(\vec{x},t)}{\bar{n}_\alpha}\left[\frac{m_\alpha}{2\pi k T(\vec{x},t)}\right]^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha}{2kT(\vec{x},t)}\left[\vec{v}-\vec{u}(\vec{x},t)\right]^2} \qquad (7.4)$$

con densidad $n_\alpha(\vec{x}, t)$, temperatura T, y velocidad media $\vec{u}(\vec{x}, t)$ dependientes localmente y, las dos últimas, comunes a todas las componentes.

Esta forma es adecuada para el estudio del acercamiento al equilibrio y el cálculo de los coeficientes de transporte. Deriva de las propiedades de la ecuación colisional (*cf.* § 8.3)

8. PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES CINETICAS.

8.1. Propiedades de la ecuación de Vlasov.

Las expresiones (6.1) o (6.2') para la ecuación de Vlasov permiten demostrar facilmente las siguientes propiedades, cf. [1] [10]

a) $f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t) \geq 0$, $f^{(1)}$ permanece no negativa.

b) $\bar{n}_\alpha \int f_\alpha^{(1)}(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3x\, d^3v = N_\alpha$ permanece constante en el tiempo. Esta propiedad no es sino la conservación del número total de partículas de tipo α , N_α

c) La ecuación de Vlasov es equivalente a una teoría de órbitas en el seno de los campos autoconsistentes. Esto sugiere un procedimiento de iteración para su resolución: si, por alguna causa, se tiene un indicio del comportamiento de los campos, la función de distribución se obtendrá, simplemente, estudiando las órbitas de las partículas cargadas (sin otras interacciones mutuas) en esos campos. Obtenida $f_\alpha^{(1)}$, los campos tendrán que ser calculados de nuevo a partir de las distribuciones de carga y corriente proporcionadas por $f_\alpha^{(1)}$ y así sucesivamente hasta alcanzar convergencia.

Esta importante propiedad deriva del hecho de que las características de la ecuación en derivadas parciales (6.1) son precisamente las ecuaciones del movimiento en el seno de los campos $\vec{E}_T$ y $\vec{B}^T$.

Las siguientes propiedades se refieren a una situación en ausencia de campos externos.

d) Cualquier función de $\vec{v}$ es solución estacionaria y espacialmente uniforme de la ecuación de Vlasov en medio infinito, aunque no todas esas soluciones son estables. En particular la función maxwelliana f_M (5.1) es solución estable.

e) Teorema H. La magnitud

$$H = \sum_\alpha \int f_\alpha^{(1)} \ln f_\alpha^{(1)}\, d^3v\, d^3x \tag{8.1}$$

es constante en el tiempo

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{8.2}$$

Como se citara en § 8.3, H está ligado a la entropía, pues, salvo una constante aditiva

$$H = -K\mathcal{S} \tag{8.3}$$

siendo K la constante de Boltzmann.

La constancia de la entropía viene ligada aquí a la ausencia de procesos irreversibles representados por las colisiones.

8.2. Propiedades del término colisional.

La forma (7.1) (7.2) del término colisional permite demostrar las siguientes propiedades, *cf*. [5], [10].

La expresión

$$\sum_{\alpha} \int C_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{v})\, d^3v \tag{8.4}$$

es nula para las siguientes formas de la función $\Psi_{\alpha}(\vec{v})$

a) $$\Psi_{\alpha}(\vec{v}) = \delta_{\alpha,\alpha_0}\, \bar{n}_{\alpha_0} \tag{8.5}$$

(8.4) queda entonces

$$\bar{n}_{\alpha_0} \int C_{\alpha_0}\, d^3v = 0 \tag{8.6}$$

indicando que el término colisional conserva el número de partículas de cada tipo

b) $$\Psi_{\alpha}(\vec{v}) = m_{\alpha}\, \bar{n}_{\alpha}\, \vec{v}$$

es decir

$$\sum_{\alpha} \int C_{\alpha} m_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \vec{v} \, d^3 v = 0 \tag{8.7}$$

indicando que la transferencia total de cantidad de movimiento (contando todos los componentes) producida por el término colisional es nula.

c) $\Psi_{\alpha}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} v^2$

es decir

$$\sum_{\alpha} \int C_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 \, d^3 v = 0 \tag{8.8}$$

indicando que la transferencia total de energía cinética producida por el término colisional es nula. La energía ganada por unos componentes es perdida por otros.

Estas propiedades serán utilizadas en el § 12 para obtener las ecuaciones de un solo fluido.

8.3. Propiedades de la ecuación colisional

La forma (6.3) de la ecuación colisional junto con la (7.1) (7.3) y las propiedades del § 8.2 permiten demostrar las siguientes propiedades para la ecuación colisional, cf. [5], [10].

a) $f_{\alpha}^{(1)} \geqslant 0$, permanece no negativa, propiedad idéntica a la (a) del § 8.1.

b) $\bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha}^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) \, d^3x \, d^3v$

permanece constante en el tiempo, es la conservación del número de partículas N_{α}. Idéntica a (b) de § 8.1.

Las propiedades siguientes son válidas exclusivamente en ausencia de campos externos (cf § 8.1)

c) La función maxwelliana f_M (5.1) es solución estacionaria y estable de la ecuación colisional en medio infinito.

Simultaneamente $P_{\alpha\beta}$ dado por (5.2) es solución para P en las mismas circunstancias.

d) Teorema H

La expresión (8.1) es monótonamente decreciente

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \tag{8.9}$$

esta propiedad está ligada al crecimiento de la entropía

$$S = -kH \tag{8.10}$$

causado por las colisiones, que son procesos irreversibles.

e) H es mínimo para la función maxwelliana (5.1)

f) Consecuencia de (c) (d) y (e) es que cualquier distribución tiende a alcanzar en plazo más o menos largo el equilibrio maxwelliano. Es decir, en ausencia de campos externos.

$$\lim_{t \to \infty} f_\alpha^{(1)} = f_M \tag{8.11}$$

Esta última propiedad, junto con las del § 8.2 sugieren la forma semifenomenológica del modelo de Krook (7.3) para el término de colisión.

Las propiedades de conservación (de masa, cantidad de movimiento y energía total) serán obtenidas en el § 12 junto a las ecuaciones macroscópicas de un solo fluido.

SEGUNDA PARTE. ECUACIONES MACROSCOPICAS

9. DEFINICION DE LOS MOMENTOS.

La función de distribución de una partícula $f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)$[2] no es, en general, medible, sí lo son sus momentos de orden bajo respecto a la velocidad, es decir, las magnitudes macroscópicas.

Convendría, de ser posible, reducir el número de variables de f_α, para ello se intentarán obtener ecuaciones que impliquen solamente a las magnitudes macroscópicas (densidad, velocidad media, presión, temperatura, etc,), es decir: las ecuaciones de los fluidos.

Según los casos, convendrá definir para cada componente del plasma una serie de magnitudes macroscópicas: un fluido. Por ej. con un plasma de electrones e iones de un solo tipo, puede convenir considerar dos fluidos separados, esto es recomendable cuando se tengan indicios de que las funciones de distribución son muy diferentes para ambos componentes (p. ej. la temperatura electrónica muy diferente de la iónica). Incluso, dentro de un mismo componente, puede convenir definir varios fluidos (p. ej. un haz de electrones monoenergéticos junto a un fondo térmico).

Por el contrario si las funciones de distribución para todos los componentes son similares (p. ej. cerca del equilibrio termodinámico), conviene definir un solo fluido con densidades, presiones y temperaturas globales.

Cuantos más fluidos se consideren en el plasma, más información se conservará pero, a cambio, más complicadas serán las ecuaciones. La elección del número de fluidos es pues una cuestión de conveniencia dictada por las circunstancias.

Recordando que la normalización de f_α ha sido elegida (cf § 2) de modo que

$$\int f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)\, d^3x\, d^3v = V \tag{9.1}$$

o bien

$$\bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)\, d^3x\, d^3v = N_\alpha$$

---

(2) Se prescindirá, en adelante, del superíndice (1) para $f_\alpha^{(1)}$

con

$$\bar{n}_\alpha = \frac{N_\alpha}{V}$$

se definen los momentos principales, de la siguiente manera:

$$\langle \Psi(\vec{v}) \rangle_\alpha = \frac{\int \Psi(\vec{v})\, f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v}{\int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v}$$

9.1. Momentos de orden cero. Densidades.

$$\Psi(v) = \bar{n}_\alpha$$

a) Densidad de partículas de tipo α

$$n_\alpha(\vec{x},t) = \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.2}$$

y se tiene evidentemente, cf. (9.1)

$$\int n_\alpha(\vec{x},t)\, d^3x = N_\alpha$$

Derivados de la magnitud anterior se tienen

a') Densidad de masa total

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t) = \sum_\alpha m_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.3}$$

b') Densidad de carga total

$$q(\vec{x},t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\vec{x},t) = \sum_\alpha q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.4}$$

9.2. Momentos de orden uno. Velocidad media

$$\Psi(\vec{v}) \equiv \vec{v}$$

b) Velocidad media de las partículas de tipo α

$$\vec{u}_\alpha(\vec{x},t) = \langle \vec{v} \rangle_\alpha = \frac{\bar{n}_\alpha}{n_\alpha(\vec{x},t)} \int \vec{v}\, f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.5}$$

En algunos casos conviene referir la variable velocidad $\vec{v}$ a ese valor medio, se tiene entonces la "velocidad fluctuante local" $\vec{W}_\alpha$ del componente α

$$\vec{W}_\alpha = \vec{v} - \vec{u}_\alpha$$

magnitudes derivadas son las siguientes:

b') Velocidad del centro de masas local

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \frac{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)\, \vec{u}_\alpha(\vec{x},t)}{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)} =$$

$$= \frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha(\vec{x}\,t)} \sum_\alpha m_\alpha \bar{n}_\alpha \int \vec{v}\, f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.6}$$

b'') Densidad de corriente eléctrica total

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \sum_\alpha q_\alpha\, n_\alpha(\vec{x},t)\, \vec{u}_\alpha(\vec{x},t) =$$

$$= \sum_\alpha q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{9.7}$$

9.3. Momentos de orden dos. Presión y temperatura.

$$\Psi(v) = \vec{v}\,\vec{v}$$

c) Tensor presión cinética.

Se define mediante el producto diádico

$$\mathbb{P}_\alpha(\vec{x},t) = m_\alpha \bar{n}_\alpha \int (\vec{v}-\vec{u}_\alpha)(\vec{v}-\vec{u}_\alpha) f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \qquad (9.8)$$

que es, evidentemente, un tensor simétrico de segundo orden.

Se puede comprobar fácilmente que, multiplicado escalarmente por un elemento de superficie dirigido, da, en dirección y sentido, el flujo de impulsión debido al movimiento de las partículas.

Nótese que (9.8) ha sido referido a la velocidad media $\vec{u}_\alpha$ de cada componente.

Si la distribución es isotrópica f_α depende solamente de $|\vec{v}|$ y $\mathbb{P}_\alpha$ es, entonces, un tensor diagonal

$$\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha \mathbb{I} \qquad (9.9)$$

siendo $\mathbb{I}$ el tensor unidad y p_a la presión ordinaria.

Si existe un eje de simetría, tomándolo como eje OZ, $\mathbb{P}_\alpha$ resulta diagonal

$$\mathbb{P}_\alpha = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

En cualquier caso, por su simetría, $\mathbb{P}_\alpha$ es diagonalizable <u>localmente</u> aunque, en general, los tres elementos diagonales serán diferentes.

Conviene separar $\mathbb{P}_\alpha$ en una parte escalar y otra sin traza, para ello se define

c') <u>Presión escalar</u>

$$p_\alpha = \frac{1}{3} \, T_r \, \mathbb{P}_\alpha \tag{9.10}$$

que es el único escalar que puede ser definido con ese único tensor y que además coincide con (9.9) en el caso isótropo.

c'') <u>Tensor de esfuerzos</u>, es la parte sin traza del tensor $\mathbb{P}_\alpha$

$$\Pi_\alpha = \mathbb{P}_\alpha - p_\alpha \, \mathbb{I} \tag{9.11}$$

Si no hay isotropía Π_α posee tanto elementos diagonales como no diagonales.

c''') <u>Temperatura local</u> de las partículas de tipo α. Se define a través de la relación habitual con la energía cinética media.

$$\frac{3}{2} K \, T_\alpha(\vec{x}, t) = \left\langle \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v} - \vec{u}_\alpha)^2 \right\rangle$$

es decir

$$K \, T_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \frac{m_\alpha \bar{n}_\alpha}{n_\alpha(\vec{x}, t)} \int W_\alpha^2 \, f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) \, d^3 v \tag{9.12}$$

y se tiene por las propias definiciones (9.8) (9.10) (9.12)

$$p_\alpha(\vec{x}, t) = n_\alpha(\vec{x}, t) \, K \, T_\alpha(\vec{x}, t) \tag{9.13}$$

nótese que esto es una consecuencia de las definiciones, no es una ecuación de estado, esta última debería incluir junto a la presión cinética otros tipos de presiones: la dinámica (originada por las fuerzas entre las partículas) y la de la radiación.

9.4. Momentos de orden tres. Flujo de calor

$$\Psi(\vec{v}) = \vec{v}\,\vec{v}\,\vec{v}$$

Solamente definiremos el vector "flujo de calor" que no es otra cosa que el flujo de energía cinética fluctuante.

$$\vec{Q}_\alpha(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\bar{n}_\alpha m_\alpha \int \vec{W}_\alpha W_\alpha^2 f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \qquad (9.14)$$

Asimismo podrían definirse otros momentos más complicados (triadas, etc.)

La manera como se han definido $\mathbb{P}_\alpha$, T_α y $\vec{Q}_\alpha$ (con relación a $\vec{v} - \vec{u}_\alpha$) es la adecuada para una teoría de varios fluidos, tantos como componentes, y es la que conviene emplear lejos del equilibrio termodinámico, cuando cada componente posee temperaturas y velocidades medias muy diferentes. Sin embargo, si estas últimas magnitudes son parecidas (cerca del equilibrio), conviene definir $\mathbb{P}_\alpha$, T_α, y $\vec{Q}_\alpha$ con respecto a una velocidad común: la del centro de masas $\vec{u}$, cf. (9.6); esto es lo que se hace en las teorías de un solo fluido - (§ 12), en este caso los valores para cada componente pueden sumarse para obtener presiones y flujos de calor totales.

10. ECUACIONES DE LOS MOMENTOS.

Las ecuaciones a que obedecen las magnitudes macroscópicas definidas en el § 9 se obtendrán multiplicando la ecuación cinética colisional m del plasma (6.3) por la función adecuada de la velocidad $\Psi(\vec{v})$ e integrando a todo el espacio de velocidades.

La ecuación cinética

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}^T(\vec{x},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}^T(\vec{x},t)\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = C_\alpha \tag{10.1}$$

con C_α de la forma (7.1)

$$C_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\cdot\vec{J}_\alpha$$

Sea ahora

$$\langle \Psi(\vec{v})\rangle_\alpha = \frac{\int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\,\Psi(\vec{v})\,d^3v}{\int f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\,d^3v} =$$

$$= \frac{\bar{n}_\alpha \int f_\alpha\,\Psi\,d^3v}{n_\alpha(\vec{x},t)} \tag{10.2}$$

Multiplicando (10.1) por $\Psi(\vec{v})\bar{n}_\alpha$ e ignorando sobre el espacio de velocidades, como $\vec{x}$, $\vec{v}$ y t son variables independientes se tendrá (3)

$$\int \bar{n}_\alpha\,\Psi(\vec{v})\,\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\,d^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left[n_\alpha(\vec{x},t)\langle\Psi(\vec{v})\rangle_\alpha\right] \tag{10.3}$$

---

(3) Por simplicidad se supone Ψ escalar, si posee otro caracter tensorial es fácil reproducir el resultado correcto.

$$\int n_\alpha \Psi(\vec{v})\, \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}}\, d^3v = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left[\int \bar{n}_\alpha \Psi(\vec{v})\, \vec{v}\, f_\alpha\, d^3v \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left[n_\alpha(\vec{x}, t) \langle \vec{v}\, \Psi(\vec{v}) \rangle_\alpha \right] \qquad (10.4)$$

Por su parte, al ser $\vec{E}^T(\vec{x}, t)$ independiente de $\vec{v}$ resulta

$$\int \vec{E}^T(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}\, \bar{n}_\alpha \Psi(\vec{v})\, d^3v =$$

$$= \bar{n}_\alpha \vec{E}^T \cdot \int \Psi \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}\, d^3v = \bar{n}_\alpha \vec{E}^T \cdot \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[\Psi f_\alpha \right] - \right.$$

$$\left. - f_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\} d^3v = \bar{n}_\alpha \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\vec{E}^T \Psi f_\alpha \right] d^3v - \vec{E}^T \cdot \left[n_\alpha(\vec{x} t) \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\alpha \right]$$

(10.5)

El primer sumando se anula en virtud del Teorema de Gauss si

$$\lim_{|v| \to \infty} v^2 f_\alpha\, |\Psi(\vec{v})| = 0$$

que se supondrá verificado.

Por su parte en

$$\bar{n}_\alpha \int \left[\vec{v} \times \vec{B}^T(\vec{x}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}\, \Psi(\vec{v})\, d^3v \qquad (10.6)$$

como el producto mixto implica componentes distintas para los tres vectores resulta:

$$\bar{n}_\alpha \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[(\vec{v} \times \vec{B}^T) f_\alpha \right] \Psi(\vec{v})\, d^3v =$$

$$= \bar{n}_\alpha \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left\{ \left[\vec{v} \times \vec{B}^T \right] f_\alpha \Psi \right\} d^3v - \bar{n}_\alpha \int \left[\vec{v} \times \vec{B}^T \right] \cdot f_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} d^3v$$

y el primer término se anula por el Teorema de Gauss si

$$\lim_{|v| \to \infty} v^3 \left| \Psi(\vec{v}) \right| f_\alpha = 0$$

quedando para (10.6)

$$-n_\alpha(\vec{x},t) \left\langle \left[\vec{v} \times \vec{B}^T \right] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle_a$$

con todo ello resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \langle \Psi \rangle_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(n_\alpha \langle \vec{v}\, \Psi \rangle_\alpha\right) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha \vec{E}^T \cdot \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\alpha -$$

$$- \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{n_\alpha}{c} \left\langle \left[\vec{v} \times \vec{B}^T \right] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\alpha = \bar{n}_\alpha \int \Psi(\vec{v})\, C_\alpha\, d^3v \qquad (10.7)$$

que es la ecuación general de los momentos. La condición suficiente de validez es que

$$\lim_{|\vec{v}| \to \infty} v^3 \left| \Psi(\vec{v}) \right| f_\alpha = 0$$

que es equivalente a la de existencia del momento de orden inmediatamente superior, es decir a la convergencia de la integral

$$\int v\, \Psi(\vec{v})\, f_\alpha\, d^3v$$

Ahora basta con sustituir $\Psi(\vec{v})$ por la expresión adecuada y disponer de un modelo para el término colisional para obtener las ecuaciones buscadas.

10.1. Ecuación de continuidad

En orden cero $\Psi(\vec{v}) \equiv 1$

entonces $\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} = 0$ y como $C_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{J}_\alpha$

resulta

$$\bar{n}_\alpha \int C_\alpha \Psi(\vec{v})\, d^3v = -\bar{n}_\alpha \int \Psi(\vec{v}) \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{J}_\alpha\, d^3v =$$

$$= -n_\alpha \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(\Psi \vec{J}_\alpha \right) d^3v + \bar{n}_\alpha \int \vec{J}_\alpha \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}}\, d^3v = 0$$

el primer término se anula en virtud del Teorema de Gauss si

$$\lim_{|\vec{v}| \to \infty} v^2 |\Psi(\vec{v})|\, |\vec{J}_\alpha| = 0$$

que se verifica para $\Psi(\vec{v}) \equiv 1$, el segundo término se anula idénticamente en este caso.

La anulación también puede comprobarse aplicando la propiedad (8.6) de C_α.

Con ello (10.7) queda, habida cuenta de las definiciones del § 9,

$$\boxed{\frac{\partial n_\alpha(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(n_\alpha(\vec{x},t)\, \vec{u}_\alpha(\vec{x},t) \right) = 0} \qquad (10.9)$$

que es la ecuación de continuidad para la densidad de particulas que también puede ponerse en la forma

$$\frac{D n_\alpha(\vec{x},t)}{D t} + n_\alpha(\vec{x},t)\, \nabla \cdot \vec{u}_\alpha(\vec{x},t) = 0 \qquad (10.9')$$

siendo el operador $\frac{D}{Dt}$ la derivada convectiva

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$$

Si se multiplica (10.9) por m_α y se suma sobre todos los componentes, resulta la <u>ecuación de continuidad de la masa</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x},t) + \nabla \cdot \left[\rho(x,t)\, \vec{u}(\vec{x},t) \right] \tag{10.10}$$

Mientras que, multiplicando (10.9) por q_α y sumando , se obtiene la <u>ecuación de continuidad de la carga</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\vec{x},t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) \tag{10.11}$$

10.2. <u>Ecuación del "movimiento"</u>

Para <u>orden uno</u> $\Psi(\vec{v}) = m_\alpha \vec{v}$, resulta sustituyendo en (10.7)

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(n_\alpha \langle \vec{v}\vec{v} \rangle m_\alpha \right) - q_\alpha n_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T \right) = \vec{K}_\alpha \tag{10.12}$$

Siendo

$$\vec{K}_\alpha \equiv m_\alpha \bar{n}_\alpha \int \vec{v}\, C_\alpha\, d^3v$$

Recuerdese que en virtud de la propiedad (8.7) del término colisional, se tiene

$$\sum_{\alpha} \vec{K}_{\alpha} = 0 \tag{10.13}$$

que, como ya se ha indicado, expresa que la impulsión total intercambiada por las colisiones es nula.

En el caso particular del modelo de Krook (7.3)

$$C_{\alpha} = -\nu \left[f_{\alpha} - f_{\alpha_0} \right] \tag{10.14}$$

resulta

$$\vec{K}_{\alpha} = -\sum_{\beta} n_{\alpha} m_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_{\beta}) \tag{10.15}$$

con

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{m_{\beta} n_{\beta}}{\sum_{\gamma} m_{\gamma} n_{\gamma}} \nu$$

Por otro lado el producto diádico

$$\langle \vec{v}\,\vec{v} \rangle = \langle \left([\vec{v} - \vec{u}_{\alpha}] + \vec{u}_{\alpha} \right) \left([\vec{v} - \vec{u}_{\alpha}] + \vec{u}_{\alpha} \right) \rangle_{\alpha} =$$

$$= \langle (\vec{v} - \vec{u}_{\alpha})(\vec{v} - \vec{u}_{\alpha}) \rangle_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha}\,\vec{u}_{\alpha}$$

por lo que (10.2) se convierte en, cf (9.8)

$$m_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) m_{\alpha} -$$

$$- q_{\alpha} n_{\alpha} \left(\vec{E}^{T} + \frac{\vec{u}_{\alpha}}{c} \times \vec{B}^{T} \right) + \nabla \cdot \mathbb{P}_{\alpha} = \vec{K}_{\alpha}$$

que habída cuenta de la ecuación de continuidad (10.9) resulta

$$\boxed{n_\alpha(\vec{x},t)\, m_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_\alpha(\vec{x},t) + n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \nabla \vec{u}_\alpha - n_\alpha q_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T\right) + \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha = \vec{K}_\alpha} \tag{10.16}$$

donde puede ponerse

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha &= \nabla p_\alpha + \nabla \cdot \Pi_\alpha \\ &= \nabla(n_\alpha k T_\alpha) + \nabla \cdot \Pi_\alpha \end{aligned} \tag{10.17}$$

el primer sumando corresponde a la fuerza debida a la presión escalar, el segundo da cuenta de efectos de "viscosidad".

La ecuación (10.16) permite obtener la variación de la velocidad con el tiempo en función de las fuerzas electromagnéticas, de presión y de $\vec{K}_\alpha$ que juega el papel de una fuerza de fricción debida a las colisiones, cf. (10.15). La ecuación (10.16) es la del movimiento del fluido o, en otros términos, la ecuación de variación de la impulsión.

Puede ponerse también en la forma

$$\begin{aligned} m_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} &= n_\alpha q_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T\right) - \\ &- \nabla p_\alpha - \nabla \cdot \Pi_\alpha + \vec{K}_\alpha \end{aligned} \tag{10.16'}$$

10.3. Ecuación de la energía

Para orden dos $\Psi(\vec{v}) = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$

Resulta entonces de (10.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \right\rangle_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\cdot\left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \vec{v} \right\rangle_\alpha\right) - q_\alpha n_\alpha \vec{E}\cdot\vec{u}_\alpha = H_\alpha$$

donde

$$H_\alpha \equiv \frac{1}{2} m_\alpha \bar{n}_\alpha \int v^2 C_\alpha \, d^3v \tag{10.18}$$

y según la propiedad (8.8) del término colisional

$$\sum_\alpha H_\alpha = 0$$

indicando que no hay transferencia global neta de energía cinética en las colisiones.

Para el resto de los términos como $\langle \vec{v} \rangle_\alpha = \vec{u}_\alpha$

se tiene

$$\left\langle \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \right\rangle_\alpha = \left\langle \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v} - \vec{u}_\alpha)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} m_\alpha u_\alpha^2 =$$

$$= \frac{3}{2} K T_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha u_\alpha^2$$

y por otro lado (utilizando el convenio de subíndices repetidos, i y j son ahora las componentes vectoriales)

$$\langle v^2 \vec{v}_j \rangle = \langle v_i v_i v_j \rangle = \langle (\vec{w} + \vec{u})_i (\vec{w} + \vec{u})_i (\vec{w} + \vec{u}_j) \rangle =$$

$$= \langle w_i w_i w_j \rangle + \langle w_i w_i \rangle u_j + \langle w_i w_j \rangle u_i +$$

$$+ u_i \langle w_i w_j \rangle + u_i u_i u_j$$

Es decir $\mathcal{J}\,\S\,9$ (9.8), (9.12), (9.14).

$$\frac{1}{2} m_\alpha \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \vec{Q}_\alpha + \frac{3}{2} k T_\alpha \vec{u}_\alpha + \frac{1}{n_\alpha} \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha$$

Con todo ello (10.18) queda

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha + \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2\right] + \\ &+ \nabla \cdot \left[\left(\frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2\right)\vec{u}_\alpha + \right. \\ &\left. + \vec{Q}_\alpha + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha\right] - q_\alpha n_\alpha \vec{E}^T \cdot \vec{u}_\alpha = H_\alpha \end{aligned}} \qquad (10.19)$$

que es la <u>ecuación de conservación de la energía.</u> El primer término da la variación en el tiempo de la densidad de energía térmica y de movimiento del fluido, el segundo el flujo de energía térmica, de movimiento, el debido a la "conductividad calorífica" ($\nabla \cdot \vec{Q}_\alpha$), y el trabajo realizado por las fuerzas de presión y viscosidad $\nabla \cdot (\mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha)$, el término siguiente es la energía suministrada por el campo y, finalmente, el segundo miembro H_α es la energía suministrada al componente $\underline{\alpha}$ en las colisiones.

Habida cuenta de (10.9') y (10.16') la ecuación (10.19) puede ponerse, tras un cálculo trivial, en la forma

$$\frac{D}{Dt}\left[P_\alpha n_\alpha^{-5/3}\right] = \frac{2}{3} n_\alpha^{-5/3}\left[H_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{K}_\alpha - \nabla \cdot \vec{Q}_\alpha\right] \qquad (10.19')$$

Hasta ahora no se han efectuado aproximaciones, por lo que las ecuaciones (10.9) (10.16) y (10.19) o sus equivalentes (10.9') (10.16') (10.19') son <u>exactas</u>.

Ese conjunto de ecuaciones no es completo, para cada componente del plasma, hay 5 ecuaciones escalares (1 de (10.9), 3 de la ecuación vectorial (10.16) y 1 más de (10.19)) para un total de 13 incógnitas (1 de n_α , 3 de $\vec{u}_\alpha$, 1 de p_α , o lo que es equivalente de T_α , 5 de las componentes independientes del tensor simétrico sin traza Π_α y 3 de $\vec{Q}_\alpha$). Hay más incógnitas que ecuaciones.

Si se amplía el número de ecuaciones, haciendo intervenir momentos de orden superior, el número de incógnitas crece más rápidamente que el de ecuaciones, el único modo de conseguir un sistema cerrado consiste en efectuar aproximaciones cortando la serie de momentos. Esta es una situación similar a la que se presentaba con la jerarquía BBGKY (cf § 3) aunque completamente independiente de aquella, la serie de ecuaciones de los momentos no se cierra independientemente de la inclusión de términos colisionales.

Si se reduce el número de ecuaciones a 4 (la de continuidad y la del movimiento)aparecen entonces 10 incógnitas, sobran 6 (que pueden ser las componentes independientes de $\mathbb{P}_\alpha$). Si se mantienen las 5 ecuaciones, aparecen 13 incógnitas, sobran por lo tanto 8 (que pueden ser las componentes de Π_α y $\vec{Q}_\alpha$).

11. ECUACIONES DE DOS FLUIDOS.

La manera habitual de cerrar las ecuaciones anteriores consiste en despreciar los momentos de orden superior o en establecer relaciones fenomenologicas entre los superiores y los inferiores(p. ej. a través de coeficientes de viscosidad o de conductividad, etc.). Se citarán aquí solamente algunas de las aproximaciones más utilizadas.

11.1. Plasma frio ("cold")

La aproximación de plasma frio consiste en suponer la temperatura suficientemente baja para que todos los momentos de la velocidad fluctuante $\vec{W}_\alpha$ (cf. § 9.2, (9.8), (9.12) y (9.14)) puedan ser ignorados.

Esto implica que las velocidades térmicas sean muy inferiores a las de desplazamiento y que, en la propagación de ondas, sean también muy inferiores a la velocidad de fase $\frac{\omega}{k}$

Por lo tanto, esta aproximación será útil para el estudio de ondas si

$$\boxed{\frac{k T_\alpha}{m_\alpha} << \frac{\omega^2}{k^2}} \qquad (11.1)$$

El primer miembro es el cuadrado de la velocidad térmica v_{th}, el segundo en el de la velocidad de fase. La aproximación será útil para ondas de velocidad de fase elevada, p.ej. dará resultados satisfactorios en la predicción de las frecuencias de corte de las ondas. La zona de validez está representada esquemáticamente en la Fig. 11.1.

Si además la frecuencia ω supera la de colisión $\nu = g\,\omega_p$ - (cf § 6.1) los términos colisionales $\vec{K}_\alpha$ y H_α pueden despreciarse.

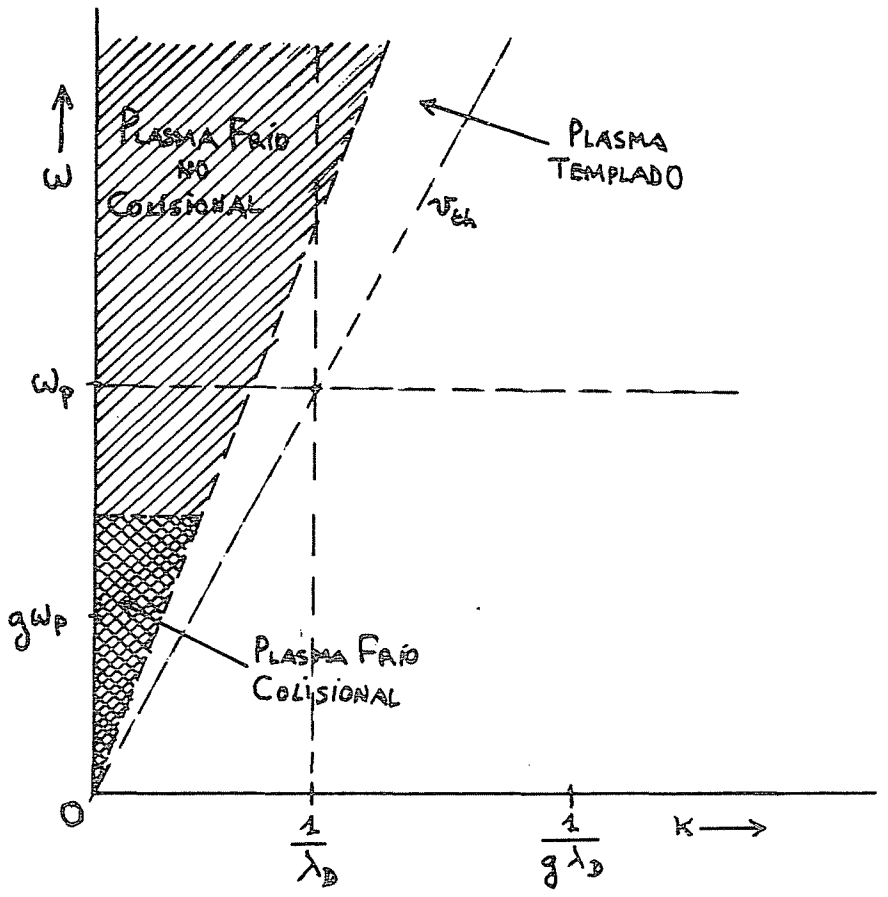

Fig. 11.1

También es válida la aproximación, cuando la presión térmica (escalar) es muy inferior a la magnética, es decir

$$P_\alpha = n_\alpha K T_\alpha << \frac{B^2}{8\pi} \tag{11.2}$$

en presencia de un campo magnético intenso y muy baja temperatura.

Por tanto las ecuaciones del plasma frio colisional se obtendrán ignorando los términos en $\mathbb{P}_\alpha$ (momentos de orden 2 de $\vec{W}_\alpha$) en la ecuación (10.16), es decir

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot(n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0 \\ &m_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha\left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c}\times B^T\right) + \vec{K}_\alpha \end{aligned}} \tag{11.3}$$

donde E^T y B^T verifican las ecuaciones de Maxwell (6.2) y el término colisional $\vec{K}_\alpha$ adopta la forma (10.15) para el modelo de Krook.

Las ecuaciones para el plasma frio colisional (11.3) forman ya un sistema cerrado (4 ecuaciones con 4 incógnitas, prescindiendo de los campos).

Si se verifican además las condiciones de no colisionalidad, $\vec{K}_\alpha$ puede ser ignorado en (11.3).

11.2. Plasma templado ("warm")

Un paso más avanzado en la inclusión de efectos de temperatura, consiste en conservar el momento de orden inferior, es decir la presión escalar p_α (o la temperatura). Con esto deberá incluirse en (10.16') ∇p_α pero no $\nabla \cdot \Pi_\alpha$ y en (10.19') se ignorará $\vec{Q}$ y la parte de $\mathbb{P}_\alpha$ no escalar. Las ecuaciones quedan entonces

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{Dn_\alpha}{Dt} + n_\alpha \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0 \\ &m_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T \right) - \nabla p_\alpha + \vec{K}_\alpha \\ &\frac{D}{Dt}\left(p_\alpha n_\alpha^{-\gamma} \right) = \frac{2}{3} n_\alpha^{-\gamma} \left[H_\alpha - \vec{u} \cdot \vec{K}_\alpha \right] \\ &\gamma = \frac{5}{3} \end{aligned}} \qquad (11.4)$$

que son las ecuaciones para el plasma templado colisional (5 ecuaciones con 5 incógnitas).

La zona de validez de estas ecuaciones no está bien determinada, p. ej. no siempre es coherente despreciar los términos diagonales de Π fren-

te a p_α, en especial en presencia de un campo magnético (*cf* § 12.6), por lo que esas ecuaciones deben ser utilizadas con precaución y no deben esperarse de ellas más que resultados cualitativos. "Grosso modo" puede decirse que pueden utilizarse sólo para velocidad de fase superior a la velocidad térmica (*cf*. Fig. 11.1).

$$\frac{\omega^2}{k^2} > \frac{k\,T_\alpha}{m_\alpha} = v_{th}^2 \qquad (11.5)$$

En el caso no colisional ($\omega \gg g\omega p$) la tercera ecuación (11.4) adopta la forma

$$\frac{D}{Dt}\left(p_\alpha\, n_\alpha^{-\gamma}\right) = 0 \qquad (11.6)$$

con $\gamma = 5/3$
que es una ecuación de estado correspondiente a la compresión adiabática de un gas perfecto tridimensional.

En razón de la incertidumbre en la validez de (11.4) y la simplicidad de (11.6) se acostumbran a utilizar las ecuaciones (11.4) con la última en la forma (11.6) con γ tomado como un parámetro fenomenológico. P. ej. para el estudio de las ondas propias del plasma (las longitudinales de frecuencia cercana a ωp) $\gamma = 3$, (11.6) es entonces la adiabática de un gas perfecto monodimensional. Para frecuencias muy bajas $\gamma \approx 1$. (11.6) es una isoterma, *cf*. (9.13), etc.

En conclusión, los efectos de temperatura sólo pueden ser tenidos en cuenta correctamente utilizando las ecuaciones cinéticas, bien la de Vlasov bien la colisional (según las circunstancias, *cf* § 6.1); las ecuaciones del plasma templado deben ser utilizadas con suma precaución.

12. ECUACIONES DE UN FLUIDO.

Cuando las colisiones son predominantes

$$\omega << \nu_c \sim g\,\omega_p \tag{12.1}$$

durante un periodo de la onda tienen lugar gran número de colisiones, las partículas tienden a adquirir un equilibrio termodinámico común en el que la temperatura y velocidad media de desplazamiento serán similares para todos los componentes.

12.1. Momentos.

En estas circunstancias conviene definir las magnitudes macroscópicas con relación a una sola velocidad común, la del centro de masas (9.6).

$$\vec{u} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha} \tag{12.2}$$

con ello el tensor presión (9.8) y el flujo de calor (9.14) quedan ahora definidos por

$$\mathbb{P}_\alpha^{(CM)}(\vec{x},t) = m_\alpha \bar{n}_\alpha \int (\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})\, f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{12.3}$$

la presión total es

$$\mathbb{P}(\vec{x},t) = \sum_\alpha \mathbb{P}_\alpha^{(CM)}(\vec{x},t) \tag{12.4}$$

mientras el flujo de calor es

$$\vec{Q}_\alpha^{(CM)}(\vec{x},t) = m_\alpha \bar{n}_\alpha \int (\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})^2\, f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v \tag{12.5}$$

El resto de las magnitudes globales utilizadas son:

Densidad total de partículas

$$n(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x},t) \tag{12.6}$$

Densidad de masa

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x},t) \tag{12.7}$$

Densidad de carga

$$q(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x},t) \tag{12.8}$$

Densidad de corriente

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x},t)\, \vec{u}_{\alpha}(\vec{x},t) \tag{12.9}$$

Flujo total de calor

$$\vec{Q}(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^{(CM)}(\vec{x},t) \tag{12.10}$$

Temperatura cinética común

$$n(\vec{x},t)\, k\, T(\vec{x},t) = \frac{1}{3}\, T_r\, \mathbb{P}(\vec{x},t) \tag{12.11}$$

12.2. Ecuaciones de los momentos

Las ecuaciones de los momentos se obtendrán ahora a partir de la forma general (10.7), teniendo en cuenta las definiciones del § 12.1.

Así (10.7) para $\Psi \equiv 1$ conduce a (10.10) y (10.11) que se mantienen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{12.13}$$

Para $\Psi(v) = m_\alpha \vec{v}$ se obtiene (10.12), es decir

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \left(n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha\right) -$$

$$- q_\alpha n_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T\right) = \vec{K}_\alpha \qquad (12.14)$$

Si $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, como $\langle \vec{w}_\alpha \rangle = \vec{u}_\alpha - \vec{u}$ se tendrá ahora

$$\langle \vec{v}\vec{v} \rangle = \langle (\vec{w} + \vec{u})(\vec{w} + \vec{u}) \rangle_\alpha = \langle \vec{w}\vec{w} \rangle_\alpha +$$

$$+ \vec{u} \langle \vec{w} \rangle_\alpha + \langle \vec{w} \rangle_\alpha \vec{u} + \vec{u}\vec{u} = \langle \vec{w}\vec{w} \rangle_\alpha + \vec{u}_\alpha \vec{u}$$

$$+ \vec{u}\vec{u}_\alpha - \vec{u}\vec{u} = \frac{\mathbb{P}_\alpha}{m_\alpha n_\alpha} + \vec{u}_\alpha \vec{u} + \vec{u}\vec{u}_\alpha - \vec{u}\vec{u}$$

con lo que queda

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \vec{u}_\alpha\right) + \nabla \cdot \Big[m_\alpha n_\alpha \big(\vec{u}_\alpha \vec{u} + \vec{u}\vec{u}_\alpha -$$

$$- \vec{u}\vec{u} \big) \Big] - q_\alpha n_\alpha \left(\vec{E}^T + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}^T\right) + \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha = \vec{K}_\alpha \qquad (12.15)$$

Si ahora se suma para todos los componentes y se tiene en cuenta (12.2), (12.7) y la propiedad (8.7) de C_α, es decir, $\mathcal{J}$. (10.13)

$$\sum_\alpha \vec{K}_\alpha = 0$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) - q\vec{E}^T - \frac{1}{c}\left[\vec{J} \times \vec{B}^T\right] + \nabla \cdot \mathbb{P} = 0 \qquad (12.16)$$

y utilizando la ecuación de continuidad para (12.3) queda finalmente

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbb{P} - q\vec{E}^T - \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{B}^T\right] = 0 \tag{12.17}$$

que es la ecuación del movimiento en la teoría de un fluido.

12.3. Ley de Ohm

Si en lugar de sumar las ecuaciones (12 15), las multiplicamos primero por $\frac{q_\alpha}{m_\alpha}$ y sumamos luego, queda, cf.(12.9) (12.8)

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\vec{j}\,\vec{u} + \vec{u}\,\vec{j} - q\,\vec{u}\,\vec{u}\right] - \left(\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha}\right)\vec{E}^T$$

$$- \left[\left(\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_\alpha \vec{u}_\alpha}{m_\alpha c}\right) \times \vec{B}^T\right] + \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha =$$

$$= \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{K}_\alpha \tag{12.18}$$

Si se toma para el término colisional el modelo de Krook se tiene, tras un cálculo fácil, cf (10.15)

$$\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{K}_\alpha = -\nu \vec{j} + \nu q \vec{u}$$

La complicada ecuación (12.18) va a proporcionar, tras algunas simplificaciones, una ley de Ohm generalizada.

Para ello, con el fin de simplificar, vamor a suponer un plasma hidrogenoide ($q_\alpha = +e, -e$) en el que

$$m_i << m_e \tag{12.19}$$

Además supondremos que se intentan observar exclusivamente <u>efectos macroscópicos</u> que suceden en dimensiones L muy superiores a la longitud de Debye.

$$\boxed{L \gg \lambda_D} \tag{12.20}$$

es decir, cf.(5.3)

$$\frac{\omega_p L}{(kT/m)^{1/2}} \gg 1 \quad \text{ó es} \quad v_{th} \approx \frac{\lambda_D}{\omega_p}$$

en este caso se puede suponer

$$q(\vec{x},t) \approx 0 \qquad \text{(neutralidad macroscópica)}$$

ya que en un plasma los potenciales de las partículas quedan apantallados a distancias superiores a λ_D

Es decir se tiene $n_e \approx n_i$
o más cuantitativamente

$$\boxed{\frac{n_e - n_i}{n_i} \ll 1 \qquad \text{si} \qquad L \gg \lambda_D} \tag{12.21}$$

con todo ello queda para (12.18) tras un cálculo trivial pero laborioso

$$\vec{E}^T + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}^T = \frac{m_i m_e \nu}{e^2 \rho} \vec{j} + \frac{m_i m_e}{\rho e^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{m_e m_i}{\rho e^2} \nabla \cdot (\vec{j}\vec{u} + \vec{u}\vec{j}) + \frac{m_i}{\rho e c} \left[\vec{j} \times \vec{B}^T \right] +$$

$$+ \frac{m_i m_e}{\rho e^2} \nabla \cdot \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbb{P}_\alpha \tag{12.22}$$

que es una relación entre $\vec{j}$ y los campos, junto con una serie de términos de interpretación complicada. Esta relación es una ley de Ohm con conductividad (inversa del coeficiente de $\vec{j}$ en el primer término del segundo miembro) σ dada por

$$\sigma = \frac{e^2 \rho}{m_e m_i \nu} = \frac{e^2 \bar{n}_e}{m_e \nu} \tag{12.23}$$

Para bajas frecuencias pueden despreciarse gran cantidad de términos, cf. [1] [7]. Así, si L es una longitud característica de la distribución, V una velocidad y ω una frecuencia características, un análisis dimensional inmediato muestra que pueden despreciarse los siguientes términos en (12.22)

El término "Hall" $[\vec{j} \times \vec{B}]$ si $\dfrac{\omega \Omega_e}{\omega_p^2} << \left(\dfrac{V}{c}\right)^2$

El de $\nabla . \mathbb{P}$ si $\dfrac{\omega}{\Omega_i} << \left(\dfrac{V}{c}\right)^2$

El de $\dfrac{\partial \vec{d}}{\partial t}$ si $\dfrac{\omega}{\omega_p} << \dfrac{V}{c}$ (12.24)

Los términos en $\vec{j}\,\vec{u}$ si $\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2 << \left(\dfrac{V}{c}\right)^2, 1$

Además la corriente de desplazamiento $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ puede despreciarse en las ecuaciones de Maxwell si $\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)^2 << 1$

, es decir si $\dfrac{V}{c} << 1$

En estas expresiones Ω_e y Ω_i son las frecuencias ciclotrónicas de electrones e iones, respectivamente.

$$\Omega_\alpha = \frac{q_\alpha B}{m_\alpha c}$$

Si todas estas condiciones se verifican simultaneamente, la ecuación (12.22) queda (para bajas frecuencias y dimensiones macroscópicas) en la forma

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}^{T} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}^{T}\right) \tag{12.23'}$$

que es la forma habitual para la ley de Ohm.

Si, además $\underline{\nu}$ es muy pequeño (recuerdesé que $\underline{\nu}$ es del orden de la frecuencia de colisión $g\omega_p$, cf. § 7.4) entonces, según (12.23), la conductividad es muy grande, es decir

$$\sigma \longrightarrow \infty \qquad \text{si} \qquad \omega >> g\omega_p$$

y entonces la ley de Ohm (12.25) queda simplemente en la relación

$$\vec{E}^{T} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}^{T} = 0$$

Debe notarse que las condiciones (12.24) pueden ser incompatibles entre si, por lo que en circunstancias normales algunos términos de (12.22) deben ser incluidos.

12.4. Ecuación de conservación de la energía

Por su parte la ecuación de los momentos de orden dos se obtiene tomando

$$\Psi(\vec{v}) = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$$

en (10.7). Procediendo de modo idéntico al del § 10.3 en la obtención de (10.19), sumando las ecuaciones para todos los componentes y teniendo en cuenta la propiedad (8.8) para el término colisional, de que, cf. (10.18)

$$\sum_\alpha H_\alpha = 0$$

se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} T_r \mathbb{P} + \frac{1}{2}\rho u^2\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2} T_r \mathbb{P} + \frac{1}{2}\rho u^2\right)\vec{u} + \vec{Q} + \mathbb{P}\cdot\vec{u}\right] - \vec{j}\cdot\vec{E}^{T} = 0 \tag{12.25}$$

que es la ecuación de conservación de la energía

Por otra parte, de las ecuaciones de Maxwell para los campos internos (6.2)

$$\nabla \times \vec{E}^{I} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}^{I}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}^{I} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{I}}{\partial t}$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{E}^{(I)2}}{8\pi} + \frac{\vec{B}^{(I)}}{8\pi}\right] + \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot\left[\vec{E}^{(I)} \times \vec{B}^{(I)}\right] + \vec{j}\cdot\vec{E}^{(I)} = 0$$

con lo que la ecuación de conservación de la energía (12.25) queda en forma muy sencilla en función de la densidad de energía de los campos y del vector de Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{3}{2}nKT + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\vec{E}^{(I)2}}{8\pi} + \frac{\vec{B}^{(I)2}}{8\pi}\right] +$$

$$+ \nabla\cdot\left[\left(\frac{3}{2}nKT + \frac{1}{2}\rho u^2\right)\vec{u} + \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}^{(I)} \times \vec{B}^{(I)}\right] +\right.$$

$$\left. + \vec{Q} + \vec{\mathbb{P}}\cdot\vec{u}\right] - \vec{j}\cdot\vec{E}_{ex} = 0$$

de interpretación obvia.

Debe notarse que esta ecuación así como (12.25), (12.17), (12.13) y (12.18) son exactas, no se ha realizado ninguna aproximación, al contrario que en la ley de Ohm (12.23') que solamente es válida para bajas frecuencias y longitudes largas.

Operado ahora de modo análogo al del § 10.3 para la obtención de (10.19') la ecuación (12.25) puede convertirse en la

$$\frac{D}{Dt}\left(p\,\rho^{-5/3}\right) = \frac{2}{3}\rho^{-5/3}\left\{\left(\vec{j} - q\,\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{E}^{T} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}^{T}\right) - \nabla\cdot\vec{Q}\right\} \qquad (12.26)$$

equivalente a la (10.19') para el caso de un solo fluido.

12.5. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica (MHD).

Suponiendo despreciables los momentos de orden tres $|\vec{Q}| \approx 0$ y limitando la observación a efectos espaciales macroscópicos $L \gg \lambda_D$, se tiene, $\mathcal{G}$. (12.21) $q \approx 0$. Si además consideramos frecuencias suficientemente bajas para que (12.24) se verifique, la ley de Ohm aparecerá en la forma (12.23').

Con todo ello la ecuación (12.26) se convierte en

$$\frac{D}{Dt}\left(p\,\rho^{-5/3}\right) = \frac{2}{3}\,\rho^{-5/3}\,\frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma} \qquad (12.27)$$

$$(\omega \ll \omega_p\,,\ \lambda \gg \lambda_D)$$

Con ello quedan las ecuaciones de la MHD

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{B}\right]$$

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right) \qquad \begin{pmatrix} \omega \ll \omega_p \\ \lambda \gg \lambda_D \end{pmatrix} \qquad (12.28)$$

$$\nabla \times \vec{E}^{\,T} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{B}^{\,T}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}^{\,T} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}$$

14 ecuaciones escalares con 14 incógnitas.

Se observará que se ha suprimido la corriente de desplazamiento en la última ecuación de Maxwell. También se ha suprimido el término $\nabla \cdot \Pi$ en la ecuación del movimiento (la segunda), esta supresión es menos plausible pues hay muchas situaciones (p. ej. anisotropía creada por un campo magnético intenso) en que debe aparecer. Su contribución puede tenerse en cuenta ligando Π mediante un coeficiente de viscosidad semiempírico a los gradientes de la velocidad.

"Grosso modo" las ecuaciones (12.28) pueden considerarse adecuadas para frecuencias bajas y largas longitudes de onda, es decir para movimientos lentos globales del plasma, situaciones en las que éste se comporta como un fluido conductor ordinario.

A muy baja frecuencia también se puede tener en cuenta el término $\nabla \cdot \vec{Q}$ de (12.26) mediante un coeficiente de conductividad que ligue $\vec{Q}$ con el gradiente de temperatura.

Para el caso de conductividad infinita (12.27) queda en la forma de ecuación de estado

$$\frac{D}{Dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right)=0 \qquad \text{con} \qquad \gamma=\frac{5}{3} \tag{12.29}$$

adiabática de un gas perfecto tridimensional. Por las mismas razones expuestas en § 11.2 para el plasma templado, conviene mantener la ecuación (12.29) con un valor de γ elegido "ad hoc", se tienen entonces las ecuaciones de la MHD. Ideal

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0\\
&\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\nabla p+\frac{1}{c}\left(\vec{j}\times\vec{B}^{(T)}\right)\\
&p\rho^{-\gamma}=cte\\
&\nabla\times\left(\vec{u}\times\vec{B}^{(T)}\right)=\frac{\partial\vec{B}^{(T)}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{B}^{T}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}
\end{aligned} \tag{12.30}$$

la penúltima ecuación deriva de la combinación de la ley de Ohm con conductividad infinita

$$\vec{E}^{(T)} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}^{T} = 0$$

con la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}^{(T)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{T}}{\partial t}$$

Las ecuaciones de la MHD.ideal contienen 11 ecuaciones escalares para 11 incógnitas (ρ, $\vec{u}$, p, $\vec{j}$ y $\vec{B}$), son más sencillas que las de la MHD. (12.28) pero, a cambio, su límite de validez es mucho más restringido. En principio las ecuaciones de la MHD.ideal (12.30) valdrían para frecuencias bajas pero superiores a la de colisión y ondas largas, es decir

$$\boxed{\begin{array}{c} g\omega_p << \omega << \omega_p \\ \lambda >> \lambda_D \end{array}} \qquad (12.31)$$

región que puede ser muy reducida.

En cualquier caso estas ecuaciones deben ser utilizadas con precaución.

Las condiciones de validez de las ecuaciones de fluidos son fuertemente dependientes de las circunstancias. Existen muchas otras situaciones que requieren aproximaciones específicas. Para terminar citaremos una de ellas, en donde el campo magnético ocasiona anisotropía en el medio.

12.6. Teoría adiabática doble.

En presencia de un campo magnético muy intenso y a temperatura no despreciable, cf. (11.2), el tensor presión ya no puede considerarse isótropo. Si el campo posee un eje de simetría el tensor puede adoptar la forma (cf. § 9.3)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_\perp & 0 & 0 \\ 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix} \qquad (12.32)$$

Si el campo magnético es muy intenso el radio de Larmor $\underline{r_L}$ (4) es muy pequeño. Es decir se tienen las condiciones:

$$r_L \ll \lambda_c \quad , \quad r_L \ll L_\perp \qquad (13.33)$$

siendo λ_c la "longitud de colisión"

$$\lambda_c = \frac{v_{th}}{\nu_c} = \frac{v_{th}}{g\omega_p} = \frac{\lambda_D}{g}$$

y $L_\perp$ las dimensiones características del medio en dirección transversal al campo.

En estas circunstancias, supongamos que puede considerarse que -

$\vec{Q} \approx 0$

nótese que $\vec{Q_\perp}$ es nulo a causa de que todos los movimientos perpendiculares al campo magnético estan inhibidos.

Entonces, si con ayuda de la ecuación (10.7) se calcula la expresión

$$\frac{1}{2} m_\alpha \langle (\vec{v_i})^2 \rangle \quad \text{(sin sumar sobre } \underline{i}\text{)}$$

resulta para i = 3

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{P_{\parallel} B^2}{\rho^3}\right) = 0 \qquad (12.34)$$

mientras que para i = 1 y 2,sumando y teniendo en cuenta que las colisiones son raras, en virtud de (12.33), y que por lo tanto $\sigma \longrightarrow \infty$ resulta

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{P_\perp}{\rho B}\right) = 0 \qquad (12.35)$$

---

(4) $r_L = \frac{v_{th}}{\Omega}$, $\Omega = \frac{qB}{mc}$ es la frecuencia ciclotrónica.

Se obtienen así dos "ecuaciones de estado" separadas para los componentes longitudinales y transversales de la presión.

Esas dos ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad de la densidad (12.13) y la del movimiento (12.17), con el tensor $\mathbb{P}$ de la forma (12.23), constituyen la teoría adiabática doble también denominada de Chew, Goldberger y Watson.

13. RESUMEN SOBRE LA VALIDEZ DE LAS DIVERSAS APROXIMACIONES. CONCLUSION.

13.1. Condiciones de validez de las aproximaciones.

Se resumen aquí, muy esquemáticamente, estas condiciones, insistiendo en su caracter meramente indicativo.

a) Ecuación de Vlasov (plasma no colisional)

Ecuaciones (6.1) (6.2)

Frecuencias muy superiores a la frecuencia de colisión, longitudes de onda muy superiores a la longitud de Debye multiplicada por el parámetro del plasma g.

$$\omega \gg g\,\omega_p \sim \bar{n}\,T^{-3/2}$$

$$\lambda \gg g\,\lambda_D = \frac{8\pi e^2}{kT}$$

Vease Fig. 6.1

b) Plasma frio colisional. Ecuación de dos fluidos (11.3)

Ondas de velocidad de fase elevada y temperatura baja

$$\frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$$

o bien, campo magnético elevado con temperatura baja..

$$nkT \ll \frac{B^2}{8\pi}$$

Vease Fig. 11.1

c) Plasma templado ("warm")

Ecuación de dos fluidos (11.4)

Baja temperatura, velocidad de fase elevada, superior a la térmica

$$\frac{\omega}{k} > \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$$

Resultados poco fiables.

d) Ecuaciones de la MHD.

Ecuaciones de un fluido (12.28)

Baja frecuencia. Ondas largas

$$\omega << \omega_p$$

$$\lambda >> \lambda_D$$

e) Ecuaciones de la MHD.Ideal

Ecuaciones de un fluido (12.30)

Conductividad infinita. Ondas largas. Baja frecuencia pero muy superior a la de colisión

$$\lambda >> \lambda_D$$

$$g\,\omega_p << \omega << \omega_p$$

f) Teoría adiabática doble. Ecuaciones (12.34) (12.35)

Campos magnéticos muy intensos. Radio de Larmor muy pequeño frente a la longitud de colisión y dimensiones transversales. Frecuencia elevada

$$r_L << \frac{\lambda_D}{g} \quad , \quad r_L << L_1$$

$$\omega >> \Omega = \frac{qB}{mc} \quad , \quad \omega >> g\,\omega_p$$

13.2. Conclusión.

Por último debe tenerse en cuenta que un tratamiento macroscópico enmascara parte de los fenómenos y puede hacer aparecer otros inexistentes.

Así, las ondas sonoras iónicas predichas por la teoría de dos fluidos (plasma templado) [1] [7], no existen en la realidad más que cuando la temperatura electrónica es muy superior a la iónica, la razón es que en los demás casos hay una atenuación muy fuerte (amortiguamiento de Landau). Esta atenuación está presente en muchas otras ondas y depende fuertemente de la distribución de velocidades de las partículas, queda por tanto enmascarada en una teoría de fluidos.

Por el contrario, algunas ondas realmente existentes no son predichas por las teorías de fluidos, p. ej. los "modos Bernstein" [5] (ondas longitudinales de propagación normal al campo magnético de frecuencias armónicas de la ciclotrónica de los electrones).

Aún es más crítica la situación con respecto a las inestabilidades; mientras las hidromagnéticas son predichas por una teoría de fluidos, por el contrario las microscópicas, que dependen de la distribución de velocidades, no lo son en general.

Lo mismo sucede con las evoluciones de estados hacia el equilibrio termodinámico o con los diversos coeficientes de transporte.

Solamente mediante la utilización de las ecuaciones cinéticas puede darse cuenta rigurosa de todos esos hechos.

14. REFERENCIAS.

[1] . T.J.M. BOYD, J.J. SANDERSON. "Plasma Dynamics". Nelson. London (1969).

[2] . G. ECKER. "Theory of fully Ionized Plasmas". Academic Press. N.Y. - (1972).

[3] . S. GARTENHAUS. "Elements of Plasma Physics". Holt. Rinehart and Winston N.Y. (1964).

[4] . H GOLDSTEIN. "Mecánica Clásica". Aguilar. Madrid (1964).

[5] . S. ICHIMARU. "Basic Principles of Plasma Physics. A Statistical - Approach". Benjamin. N.Y. (1973)

[6] . Y.L. KLIMONTOVICH. "The Statistical Theory of non-equilibrium processes in a Plasma". Pergamon Press. Oxford (1967).

[7] . N.A. KRALL, A.W. TRIVELPIECE. "Principles of Plasma Physics". McGraw-Hill, N. Y. (1973).

[8] . L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ. "Mecánica". Reverté. Barcelona (1965).

[9] . M.A. LEONTOVICH (Ed.). "Reviews of Plasma Physics". Vol. 1. Consultants Bureau. N.Y. (1965)

[10]. D.C. MONTGOMERY, D.A. TIDMAN. "Plasma Kinetic Theory". McGraw-Hill. N.Y. (1964)

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, División de Fusión y Reactores Experimentales,Madrid

"Elementos de Teoría Cinética de Plasmas".

GUASP, J. (1976) 77 pp. 2 figs. 10 refs.

Dentro de una serie de seminarios sobre física del plasma y de la fusión, se exponen las bases físicas de las ecuaciones cinéticas del plasma: ecuaciones de Vlasov y colisional junto a sus márgenes de validez. Se obtienen, también, las ecuaciones de los momentos de orden inferior a que obedecen las magnitudes macroscópicas y se exponen las aproximaciones comunmente utilizadas: ecuaciones de dos fluidos del plasma frio, templado ("warm"), ecuaciones de la Magnetohidrodinámica y de la teoría adiabática doble (C.G.W.).

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.-A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, División de Fusión y Reactores Experimentales,Madrid.

"Elementos de Teoría Cinética de Plasmas".

GUASP, J. (1976) 77 pp. 2 figs. 10 refs.

Dentro de una serie de seminarios sobre física del plasma y de la fusión, se exponen las bases físicas de las ecuaciones cinéticas del plasma: ecuaciones de Vlasov y colisional junto a sus márgenes de validez. Se obtienen, también, las ecuaciones de los momentos de orden inferior a que obedecen las magnitudes macroscópicas y se exponen las aproximaciones comunmente utilizadas: ecuaciones de dos fluidos del plasma frio, templado ("warm"), ecuaciones de la Magnetohydrodinámica y de la teoría adiabática doble (C.G.W.).

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, División de Fusión y Reactores Experimentales,Madrid.

"Elementos de Teoría Cinética de Plasmas".

GUASP, J. (1976) 77 pp. 2 figs. 10 refs.

Dentro de una serie de seminarios sobre física del plasma y de la fusión, se exponen las bases físicas de las ecuaciones cinéticas del plasma: ecuaciones de Vlasov y colisional junto a sus márgenes de validez. Se obtienen, también, las ecuaciones de los momentos de orden inferior a que obedecen las magnitudes macroscópicas y se exponen las aproximaciones comunmente utilizadas: ecuaciones de dos fluidos del plasma frio, templado ("warm"), ecuaciones de la Magnetohidrodinámica y de la teoría adiabática doble (C.G.W.).

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, División de Fusión y Reactores Experimentales,Madrid.

"Elementos de Teoría Cinética de Plasmas".

GUASP, J. (1976) 77 pp. 2 figs. 10 refs.

Dentro de una serie de seminarios sobre física del plasma y de la fusión, se exponen las bases físicas de las ecuaciones cinéticas del plasma: ecuaciones de Vlasov y colisional junto a sus márgenes de validez. Se obtienen, tambien, las ecuaciones de los momentos de orden inferior a que obedecen las magnitudes macroscópicas y se exponen las aproximaciones comunmente utilizadas: ecuaciones de dos fluidos del plasma frio, templado ("warm"), ecuaciones de la Magnetohidrodinámica y de la teoría adiabática doble (C.G.W.).

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, Fusion and Experimental Reactors Division, Madrid.

"Elements of plasma Kinetic theory".

GUASP, J.; (1976) 77 pp., 2 figs, 10 refs.

We have attempted to expose, inside a series of seminars on plasma and fusion physics, the physical foundations of plasma kinetic equations. We have discussed the Vlasov and collisional equations with its application range. We have obtained the momenta equations for the macroscopic magnitudes and the more usual aproximations: two fluid equations for cold and warm plasmas, magnetohydrodynamic equations and the double-adiabatic theory (C.G.W.).

INIS CLASSIFICATIONS AND DESCRIPTORS.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, Fusion and Experimental Reactors Division, Madrid.

"Elements of plasma Kinetic theory".

GUASP, J.; (1976) 77 pp., 2 figs, 10 refs.

We have attempted to expose, inside a series of seminars on plasma and fusion physics, the physical foundations of plasma kinetic equations. We have discussed the Vlasov and collisional equations with its application range. We have obtained the momenta equations for the macroscopic magnitudes and the more usual aproximations: two fluid equations for cold and warm plasmas, magnetohydrodynamic equations and the double-adiabatic theory (C.G.W.).

INIS CLASSIFICATIONS AND DESCRIPTORS.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, Fusion and Experimental Reactors Division, Madrid

"Elements of plasma Kinetic theory".

GUASP, J.; (1976) 77 pp., 2 figs. 10 refs.

We have attempted to expose, inside a series of seminars on plasma and fusion physics, the physical foundations of plasma kinetic equations. We have discussed the Vlasov and collisional equations with its application range. We have obtained the momenta equations for the macroscopic magnitudes and the more usual aproximations: two fluid equations for cold and warm plasmas, magnetohydrodynamic equations and the double-adiabatic theory (C.G.W.).

INIS CLASSIFICATIONS AND DESCRIPTORS.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.

J.E.N. 317

Junta de Energía Nuclear, Fusion and Experimental Reactors Division, Madrid.

"Elements of plasma Kinetic theory".

GUASP, J. (1976) 77 pp., 2 figs. 10 refs.

We have attempted to expose, inside a series of seminars on plasma and fusion physics, the physical foundations of plasma kinetic equations. We have discussed the Vlasov and collisional equations with its application range. We have obtained the momenta equations for the macroscopic magnitudes and the more usual aproximations: two fluid equations for cold and warm plasmas, magnetohydrodynamic equations and the double-adiabatic theory (C.G.W.).

INIS CLASSIFICATIONS AND DESCRIPTORS.- A-14; Cold Plasma; Collisional Plasma; Collisionless Plasma; Boltzmann-Vlasov Equation; Kinetic Equations; Magnetohydrodynamics; Fokker-Planck Equation; Ohm Law.