

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear



*Desarrollo de un código de onda completa en  
dos dimensiones y su aplicación al estudio de la  
reflectometría de microondas como técnica de  
diagnosís en plasmas de fusión*



Memoria presentada por

*Emilio José Blanco Villarreal*

para optar al grado de

Doctor en Ciencias Físicas

por la

Universidad Complutense de Madrid

**2006**

A mis padres

## *Agradecimientos*

*Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo de numerosas personas que de una manera u otra han contribuido al desarrollo de esta tesis. A todos ellos quiero expresar mi más sincero agradecimiento.*

*En primer lugar, quiero agradecer a mi directora de tesis, la Dra. Teresa Estrada, su total dedicación a la orientación de este trabajo. Sus constantes ideas, sugerencias y estímulos han hecho posible la realización de esta tesis.*

*Mi agradecimiento al Dr. Eberhard Holzhauer con quien he tenido la suerte de trabajar durante algún tiempo y aprender mucho sobre las simulaciones en el campo de la reflectometría de microondas.*

*A la Dra. María Ángeles Pedrosa, al Dr. Carlos Hidalgo y a todos los miembros del Laboratorio Nacional de Fusión por Confinamiento Magnético por su apoyo.*

*Tampoco puedo olvidarme del Dr. Stephane Heuraux por su ayuda en las primeras etapas de este trabajo ni de los miembros del Centro de Fusão Nuclear de Lisboa por la estupenda acogida que me dieron durante las breves estancias que realicé allí durante mi doctorado.*

*También quiero agradecer a mis compañeros de despacho, Ángela Hidalgo, David Rapisarda y Eduardo Calderón su compañía y apoyo durante estos años. El ambiente de trabajo ha sido excelente.*

*A mis padres, Sagrario y Octavio, quienes han sido un estímulo constante durante estos cuatro años. Sé que su alegría y satisfacción por mi grado de Doctor en Ciencias Físicas es tan intensa como la mía. Os quiero.*

*E. Blanco*

# INDICE

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción a la fusión nuclear	1
1.2. Fusión por confinamiento magnético	5
1.2.1. Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos	5
1.2.2. Dispositivos experimentales: Tokamaks y Stellarators	8
1.3. Necesidad de caracterizar los parámetros físicos del plasma	12
<b>CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA REFLECTOMETRÍA DE MICROONDAS</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción	19
2.2. Propagación de ondas en plasmas magnetizados	21
2.2.1. Introducción	21
2.2.2. Incidencia perpendicular a las superficies de densidad constante	24
2.2.2.1. Modo Ordinario en incidencia normal (modo O)	24
2.2.2.2. Modo Extraordinario en incidencia normal (modo X)	25
2.2.3. Incidencia oblicua a las superficies de densidad constante	28
2.2.3.1. Modo Ordinario en incidencia oblicua	28
2.2.3.2. Modo Extraordinario en incidencia oblicua	29
2.2.4. Propagación de ondas en presencia de fluctuaciones de densidad	31
2.3. Reflectometría Doppler	33
<b>CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DE ONDA COMPLETA EN DOS DIMENSIONES PARA PROPAGACIÓN EN MODO EXTRAORDINARIO</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción al método de las diferencias finitas	41
3.2. Relación de dispersión numérica y real	43
3.3. Estabilidad numérica	47
3.4. Ecuaciones de Maxwell en el vacío. Algoritmo de Yee	49

3.4.1. Ecuaciones de Maxwell	49
3.4.2. Reducción a 2D	50
3.4.3. Modo ordinario y modo extraordinario de propagación	51
3.4.4. Algoritmo de Yee	51
3.5. Efectos de dispersión numérica y estabilidad	55
3.5.1. Relación de dispersión numérica en 2D	55
3.5.2. Comparación con el caso no dispersivo	55
3.5.3. Anisotropía inducida en la velocidad de fase. Simulaciones	56
3.5.4. Estabilidad numérica	61
3.6. Condiciones de contorno	63
3.6.1. Introducción	63
3.6.2. Técnica PML	64
3.6.2.1. Aplicación al modo extraordinario	64
3.6.2.2. Simulaciones	69
3.7. Introducción del plasma en el código	70
3.8. Guías de onda y antenas	73
3.8.1. Antenas estándar	73
3.8.2. Haces gaussianos	77
3.9. Detección de la señal	79
<b>CAPÍTULO 4. ASIMETRÍA NATURAL EN MODO X</b>	<b>81</b>
4.1. Introducción	81
4.2. Bases teóricas sobre el origen de la asimetría	82
4.2.1. Caso VINETA	85
4.2.2. Caso TJ-II	88
<b>CAPÍTULO 5. MEDIDA DE FLUCTUACIONES DE DENSIDAD</b>	<b>97</b>
5.1. Descripción del reflectómetro instalado en TJ-II	97
5.2. Resultados experimentales	100
5.3. Resultados de la simulación	108

<b>CAPÍTULO 6. APLICACIÓN DEL CÓDIGO AL ESTUDIO DE LA REFLECTOMETRÍA DOPPLER</b>	<b>113</b>
6.1. Efectos a tener en cuenta a la hora de diseñar un reflectómetro Doppler	113
6.2. Proceso de optimización de un reflectómetro Doppler	115
6.3. Resultados del código	119
6.3.1. Efectos de la curvatura del plasma	122
6.3.2. Efectos de la curvatura del frente de onda	127
6.3.3. Efecto de la anchura espectral de la turbulencia	132
6.3.4. Caracterización de números de onda altos	134
6.3.5. Amplitud de campo eléctrico en las proximidades de la capa de corte	137
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>141</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>145</b>
<b>PUBLICACIONES DEL AUTOR</b>	<b>149</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. INTRODUCCIÓN A LA FUSIÓN NUCLEAR

La producción de energía a partir de reacciones nucleares se basa en la diferencia existente en la energía de enlace nuclear de cada núcleo. La figura 1.1 muestra la energía de enlace nuclear por nucleón (protones o neutrones) en función del número de nucleones constituyentes del núcleo. Dicha energía proviene del hecho de que la masa de un núcleo es inferior a la suma de las masas de cada uno de sus constituyentes por separado y viene dada por  $E = \Delta m \cdot c^2$  siendo  $\Delta m$  la diferencia de masa y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

La estructura fina que se observa en la figura 1.1 se debe a efectos cuánticos: existen ciertos números de protones y neutrones llamados “mágicos” tales que el núcleo que forman tiene una configuración muy estable. El primer número mágico es dos, el núcleo de helio formado por dos protones y dos neutrones.

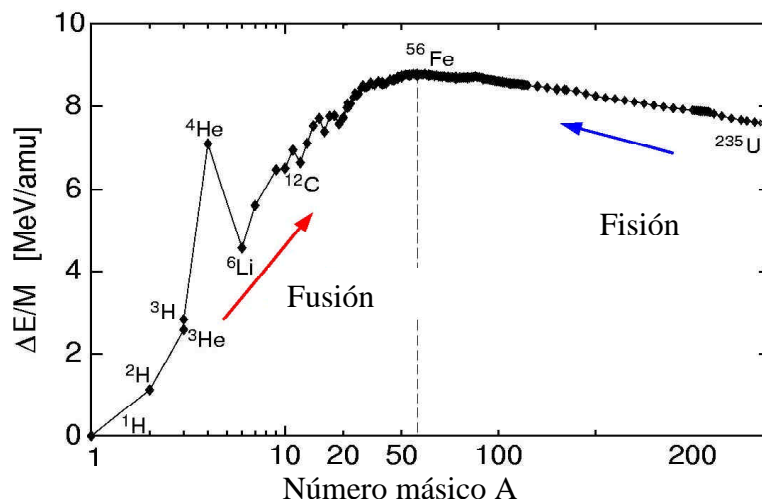


Figura 1.1 Energía de enlace nuclear por nucleón en función del número de nucleones

A partir de la figura 1.1 está claro que hay dos formas de ganar energía nuclear:

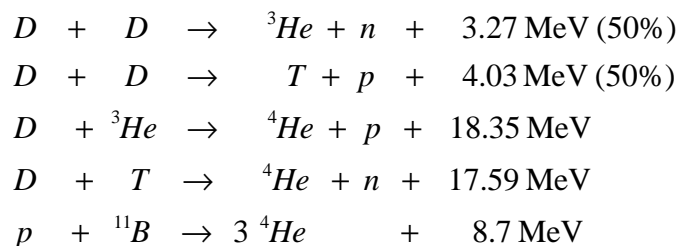
1. Transformando núcleos pesados en núcleos de peso intermedio: procesos de fisión nuclear. En estos procesos la energía desprendida por nucleón es del orden de 1 MeV, seis o siete órdenes de magnitud por encima de las energías típicas involucradas en las reacciones químicas.
2. Transformando núcleos ligeros en otros más pesados: procesos de fusión nuclear. En particular, la fusión de isótopos de hidrógeno en helio ofrece la máxima energía por unidad de masa. Conseguir esto de una forma controlada es el objetivo de la investigación en fusión nuclear.

En la actualidad, la producción de energía de fisión se utiliza en un gran número de países y la energía así generada constituye un porcentaje considerable del total de la energía consumida. Aunque la investigación en fusión nuclear para la producción de energía comenzó de forma paralela a la investigación en fisión nuclear, el grado de desarrollo tecnológico necesario para la fusión es considerablemente superior y no existe hoy en día ninguna planta de producción de energía de fusión. No obstante, la fusión nuclear es en la actualidad una de las áreas de investigación de gran interés mundial. Su interés se debe fundamentalmente a la enorme demanda de energía que existe en el planeta actualmente y sobre todo a la que previsiblemente existirá en los próximos años. Las fuentes de energía renovables no son capaces de suministrar la cantidad de energía demandada y los recursos naturales empleados tradicionalmente tales como el carbón o el petróleo provocan serios daños al medio ambiente. Por otro lado, los reactores de fisión nuclear aunque tienen capacidad para producir masivamente energía presentan serios inconvenientes como los residuos radiactivos que generan o el riesgo de sufrir accidentes graves que puedan poner en peligro a la población.

Las reacciones nucleares están gobernadas por la interacción nuclear fuerte, que actúa en distancias pequeñas, comparables al tamaño del radio del núcleo. Sin embargo, cuando la distancia entre los núcleos que se pretenden fusionar es mayor que la distancia equivalente a varios radios nucleares, la fuerza repulsiva de Coulomb entre las cargas positivas de cada núcleo se hace dominante. Para lograr acercar dos núcleos ligeros a distancias lo suficientemente pequeñas como para que la interacción nuclear fuerte pueda producir la fusión de los núcleos, la energía involucrada debería ser del

orden de cientos de keV. Esto haría de la fusión un proceso casi imposible para los actuales dispositivos experimentales existentes en el mundo. Sin embargo, gracias al efecto túnel es posible que tales reacciones se produzcan a energías de unos pocos keV. La probabilidad de que ocurra dicho efecto túnel tiene una fuerte dependencia con la velocidad relativa de las partículas que colisionan.

Posibles candidatas para la producción de energía de fusión en nuestro planeta son las siguientes reacciones:



De todas ellas, la reacción de deuterio y tritio es la más prometedora puesto que, como puede observarse en la figura 1.2, tiene la sección eficaz más alta a la menor temperatura.

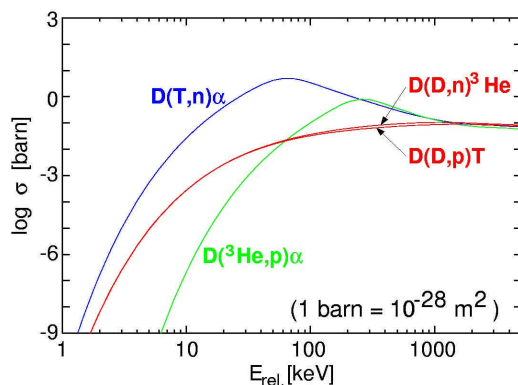


Figura 1.2 Sección eficaz para distintas reacciones en función de la energía en el centro de masas

En el caso de la reacción de deuterio y tritio, para que se produzca un número suficiente de reacciones de fusión, es necesario calentar el combustible hasta temperaturas del orden de cien millones de grados. A estas temperaturas el combustible

es un gas ionizado en el que coexisten partículas cargadas positivamente (iones), negativamente (electrones) y partículas neutras, que se denomina plasma.

El objetivo de la investigación en fusión nuclear es conseguir que simultáneamente tres parámetros físicos asociados al plasma: densidad,  $n$ , temperatura,  $T$ , y tiempo de confinamiento de la energía,  $t_E$ , cumplan la siguiente desigualdad conocida como criterio de Lawson [1]:

$$nTt_E > 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot \text{keV} \cdot \text{s}$$

Cuando las tres magnitudes anteriormente mencionadas cumplen la igualdad se dice que el sistema ha alcanzado condiciones de ignición. En estas condiciones, las reacciones de fusión podrían seguir produciéndose sin ningún aporte energético exterior.

En la actualidad hay dos líneas de investigación abiertas y en continuo desarrollo para conseguir tal objetivo:

#### *Fusión por confinamiento inercial*

En esta línea de investigación se pretende obtener plasmas muy densos ( $n \approx 10^{30} \text{ m}^{-3}$ ) durante tiempos muy cortos ( $t_E \approx 10^{-9}$  seg). Para ello se emplea un sistema de múltiples láseres que depositan una gran cantidad de potencia en un pequeño blanco esférico que constituye el combustible de fusión. La energía es absorbida por las capas esféricas más externas del combustible que se expanden radialmente hacia fuera. Como consecuencia de la expansión, la zona más interna del combustible experimenta una implosión o compresión súbita que eleva fuertemente la densidad y la temperatura del plasma alcanzándose condiciones próximas a la ignición.

#### *Fusión por confinamiento magnético*

La línea de investigación basada en el confinamiento magnético persigue la obtención de plasmas menos densos ( $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ) que los conseguidos en fusión por

confinamiento inercial pero durante tiempos más largos ( $t_E \approx 1$  seg). Esto se consigue mediante campos magnéticos muy intensos (varios Tesla) que obligan a las partículas cargadas del plasma a describir trayectorias cerradas en el interior de los dispositivos de fusión.

El estado actual de ambas vías de investigación es parecido en lo que respecta al triple producto  $nTt_E$  que se ha conseguido experimentalmente. Sin embargo, las investigaciones que se realizan dentro del área del confinamiento inercial están parcialmente clasificadas y no se conoce con detalle la situación actual de esta línea de investigación. En los dispositivos experimentales de fusión por confinamiento magnético se ha conseguido que, de forma independiente, cada uno de los parámetros del plasma alcance el valor requerido para un futuro reactor de fusión nuclear. Sin embargo, aún no se ha conseguido que, simultáneamente, la densidad y la temperatura del plasma y el tiempo de confinamiento de la energía cumplan el criterio de Lawson.

El contenido de esta memoria se enmarca en el estudio de los plasmas confinados magnéticamente.

## **1.2. FUSIÓN POR CONFINAMIENTO MAGNÉTICO**

### ***1.2.1. Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos***

El confinamiento magnético se basa en el hecho de que una partícula cargada con una determinada energía y en presencia de un campo magnético externo efectúa un movimiento circular alrededor de la línea de campo quedando “atrapada” por la misma. De acuerdo con esto, si las líneas de campo magnético se cierran sobre si mismas en el interior de un dispositivo experimental entonces, en principio, todas las partículas cargadas del plasma seguirán las trayectorias cerradas de las líneas de campo magnético y quedarán confinadas en su interior.

El movimiento de una partícula cargada con carga  $q$  y masa  $m$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  y un campo eléctrico  $\vec{E}$  viene determinado por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

Si suponemos que en el plasma no existe ningún campo eléctrico entonces la energía cinética de la partícula permanece constante puesto que la fuerza es perpendicular a la velocidad. Dicha fuerza puede cambiar exclusivamente la dirección de la velocidad de la partícula pero no su magnitud. El movimiento de la partícula se puede describir en términos de sus componentes en la dirección paralela  $\vec{v}_{\parallel}$  y en la dirección perpendicular  $\vec{v}_{\perp}$  al campo magnético. De estas dos componentes de la velocidad, sólo la componente  $\vec{v}_{\perp}$  interacciona con el campo magnético y el resultado de esta interacción es un movimiento circular de la partícula en un plano perpendicular al campo magnético  $\vec{B}$ . Este movimiento circular en torno a la línea de campo se superpone con un movimiento de traslación de la partícula en la dirección paralela al campo magnético. El resultado final es un movimiento helicoidal a lo largo de la línea de campo magnético.

El radio de la trayectoria circular en el plano perpendicular a  $\vec{B}$  se conoce con el nombre de radio de Larmor y viene dado por:

$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (1.2)$$

La frecuencia angular de giro de la partícula se conoce con el nombre de frecuencia ciclotrónica y su valor es:

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (1.3)$$

Supongamos ahora que la partícula esta sometida a una fuerza adicional  $\vec{F}$ . El origen físico de esta fuerza puede ser muy variado. Por ejemplo, su aparición puede deberse a la presencia de campos eléctricos o gradientes de presión en el plasma o incluso a la presencia de campos gravitatorios no despreciables en el caso particular de plasmas astrofísicos. En cualquier caso, la ecuación que rige el movimiento es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{F} \quad (1.4)$$

Como consecuencia de esta fuerza, la partícula experimenta un movimiento de arrastre en la dirección perpendicular a la fuerza y al campo magnético del dispositivo. El valor de la velocidad de arrastre viene dado por:

$$\vec{v}_{\text{deriva}} = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (1.5)$$

Este movimiento de arrastre de las partículas del plasma inducido por diversos tipos de fuerzas que existen en el plasma se conoce con el nombre de “deriva” de las partículas. Las derivas más importantes en los plasmas de fusión nuclear son: la deriva debida al campo eléctrico, deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$ , y la deriva debida al gradiente del campo magnético, deriva  $\vec{B} \times \vec{\nabla} B$ .

#### *Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$*

Esta deriva tiene su origen en la presencia de campos eléctricos en el interior del plasma. Cada partícula cargada del plasma experimenta una fuerza  $\vec{F} = q\vec{E}$  que provoca una deriva en su trayectoria. La velocidad de deriva es:

$$\vec{v}_{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (1.6)$$

La principal característica de esta deriva es que el movimiento es independiente de la masa de las partículas y de su carga y, por tanto, provoca un movimiento

macroscópico del plasma en la dirección perpendicular al campo eléctrico y al campo magnético.

*Deriva  $\vec{B} \times \vec{\nabla} B$*

Si el campo magnético no es constante, las partículas también experimentan una deriva como consecuencia de la presencia de gradientes en el campo magnético. En los dispositivos experimentales, el campo magnético tiene un gradiente en la dirección transversal  $\vec{\nabla}_{\perp} B$  a las líneas de campo. Debido a este gradiente, las partículas experimentan una fuerza  $\vec{F} = -\vec{m} \vec{\nabla} B$ , donde  $\vec{m}$  es el momento magnético de las partículas cuyo valor es  $\vec{m} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ . Esta fuerza provoca una deriva en la dirección perpendicular al campo magnético y a su gradiente, que viene dada por:

$$\vec{v}_{\vec{B} \times \vec{\nabla} B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} (\vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} B) \quad (1.7)$$

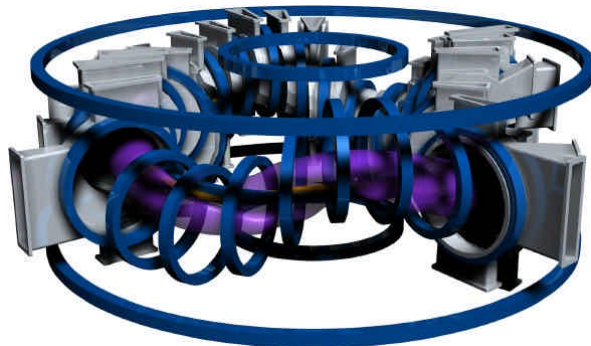
Como puede observarse, esta deriva depende de la energía cinética de las partículas asociada a la rotación transversal y del valor y signo de la carga de las partículas. Esto significa que los electrones e iones del plasma experimentan derivas en sentidos contrarios lo que provoca la aparición de campos eléctricos en el interior del plasma. Estos campos eléctricos hacen que las partículas escapen de las trayectorias cerradas de las líneas de campo magnético y, por tanto, el confinamiento en el interior del dispositivo experimental se pierde. Esto se evita si el campo magnético confinante no es puramente toroidal, es decir, si además tiene una componente poloidal que lo convierte en un campo helicoidal.

### ***1.2.2. Dispositivos experimentales: Tokamaks y Stellarators***

Atendiendo a la forma de generar el campo magnético que confina el plasma es posible clasificar los dispositivos experimentales existentes en la actualidad en dos grandes grupos: dispositivos tipo stellarator y dispositivos tipo tokamak.

*Dispositivos tipo Stellarator*

En estos sistemas, el campo magnético que confina el plasma en el interior del dispositivo experimental se genera completamente mediante un conjunto de bobinas conductoras externas por las que circulan corrientes eléctricas. Lyman Spitzer fue el primero en inventar un dispositivo de estas características en 1951. Inicialmente fueron dejados de lado porque es necesaria una precisión elevada en la disposición espacial de las bobinas que, en aquella época, era inalcanzable con la tecnología existente. Sin embargo, debido al avance que ha experimentado la tecnología en las últimas décadas esto no constituye un problema insalvable y cada día es mayor el número de dispositivos tipo stellarator que existen en el mundo. La figura 1.3 muestra un diagrama simplificado del sistema de bobinas conductoras, de la cámara de vacío con sus ventanas de acceso para los diagnósticos del plasma y de la forma del plasma del dispositivo experimental tipo stellarator TJ-II instalado y actualmente operativo en CIEMAT (Madrid).

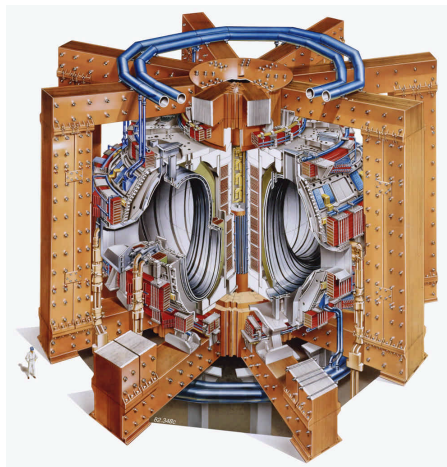


*Figura 1.3 Dispositivo experimental tipo stellarator TJ-II instalado y actualmente operativo en CIEMAT (Madrid)*

*Dispositivos tipo Tokamak*

Este tipo de dispositivo fue propuesto inicialmente por dos físicos rusos Tamm y Sakharov en el año 1952 y fue construido posteriormente bajo la dirección de Artsimovich. En estos dispositivos, la componente poloidal del campo magnético es generada por el propio plasma y la componente toroidal se genera mediante un conjunto de bobinas conductoras externas. Por tanto, son sistemas que necesitan una inducción de

corriente en el plasma para generar la configuración magnética que permite confinar el plasma en el interior del dispositivo. Aunque su fabricación, desde el punto de vista tecnológico, es algo más sencilla que la fabricación de los stellarators, la necesidad de inducir corriente en el plasma los convierte en sistemas intrínsecamente pulsados, algo desfavorable para la producción de energía en una central eléctrica. No obstante, se han propuesto formas para mantener la corriente en el plasma el tiempo suficiente como para producir energía de fusión de forma rentable. La figura 1.4 muestra un diagrama simplificado del dispositivo experimental tipo tokamak JET instalado y operativo en Culham (Reino Unido).



*Figura 1.4 Dispositivo experimental tipo tokamak JET situado y operativo en Culham (Reino Unido)*

#### *Ventajas e inconvenientes de stellarators y tokamaks*

Tanto tokamaks como stellarators presentan múltiples ventajas que los hacen atractivos para ser candidatos a futuros reactores experimentales de fusión, sin embargo, cada uno de ellos también presenta algunas dificultades intrínsecas.

Fundamentalmente, las principales ventajas e inconvenientes de estos dispositivos experimentales son las siguientes:

Los stellarators son dispositivos en los que no es necesario inducir corriente en el plasma para generar el campo magnético que confina al plasma en su interior y, por tanto, su funcionamiento es intrínsecamente continuo. La configuración magnética de

estos dispositivos viene determinada completamente por las corrientes que circulan por las bobinas conductoras externas y por la disposición espacial de las mismas a lo largo del dispositivo. Por el contrario, para confinar el plasma en el interior de un tokamak es necesario, además del campo magnético generado por las bobinas externas, la inducción de una corriente en el plasma. Esta inducción de corriente en el plasma los convierte en sistemas intrínsecamente pulsados.

En los tokamaks, la corriente inducida en el plasma constituye un peligro serio para la propia seguridad del dispositivo experimental. El valor de la corriente es tan elevado (varios mega-amperios) que una pérdida súbita del confinamiento del plasma puede ocasionar flujos de energía y de partículas muy elevados contra la cámara de vacío del dispositivo y dañar seriamente el dispositivo. Este fenómeno, conocido con el nombre de “disrupción”, no constituye un problema para los stellarators ya que éstos pueden funcionar sin necesidad de inducir corriente en el plasma.

Los stellarators son sistemas muy flexibles en cuanto a su configuración magnética. El campo magnético puede modificarse fácilmente cambiando el valor de las corrientes que circulan por las bobinas externas. Esto permite tener bastante bien caracterizado el campo magnético existente en el interior del dispositivo y estudiar configuraciones magnéticas que lleven a mejores resultados. Los tokamaks no presentan tanta flexibilidad en cuanto a la configuración magnética y el campo magnético no se conoce con tanta precisión como en un stellarator. La principal dificultad es que el campo magnético viene determinado parcialmente por el perfil radial de corriente inducida en el plasma y la medida experimental de este perfil es bastante complicada.

La principal ventaja de los tokamaks es que tienen una geometría más sencilla. Esto hace que su proceso de fabricación sea más sencillo y existan dispositivos de mayores dimensiones; motivo principal por el que a fecha de hoy los tokamaks han alcanzado mejores resultados en cuanto a parámetros globales del plasma tales como densidad, temperatura o tiempos de confinamiento que los alcanzados en los stellarators.

Todo el conocimiento obtenido de los estudios llevados a cabo en los sistemas experimentales existentes en el mundo, tanto tokamaks como stellarators, ha llevado a

generar leyes de escala que nos dicen, de forma global, como depende el confinamiento de múltiples parámetros. Estas leyes de escala dictan cuáles deben de ser las características “óptimas” de un futuro reactor de fusión y sirven de guía para la construcción de dispositivos experimentales cada vez mejores. Un ejemplo del avance conseguido en la investigación en fusión nuclear por confinamiento magnético lo constituye ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). ITER se fabricará en los próximos 10 años y a su diseño han contribuido los resultados experimentales obtenidos en el resto de los dispositivos dedicados a esta tarea. ITER será un reactor experimental de tipo tokamak que espera alcanzar la condición de ignición y demostrar así la viabilidad tecnológica de la fusión termonuclear como medio de producción de energía. Es el paso previo a la construcción del siguiente reactor de fusión, DEMO, que será el primer prototipo de una futura planta de producción de energía de fusión.

### **1.3. NECESIDAD DE CARACTERIZAR LOS PARÁMETROS FÍSICOS DEL PLASMA**

Un plasma confinado magnéticamente en el interior de un dispositivo experimental, ya sea tipo tokamak o tipo stellarator, presenta gradientes de densidad y de temperatura muy elevados y no se encuentra en equilibrio termodinámico con el medio que le rodea. Por ello, para mantener el plasma en estas condiciones tan alejadas del equilibrio termodinámico es necesario un aporte exterior continuo de energía y partículas.

Los modelos teóricos que describen el transporte de partículas y de energía en el interior de los dispositivos experimentales y que consideran exclusivamente las colisiones entre las diferentes partículas del plasma predicen unos ritmos de pérdidas de energía y de partículas inferiores a los observados experimentalmente. Concretamente, las teorías predicen unos tiempos de confinamiento superiores a los medidos experimentalmente en más de dos órdenes de magnitud. Este transporte de energía y de partículas anormalmente alto se denomina comúnmente con el nombre de “transporte anómalo” y, en gran medida, se debe a fenómenos turbulentos que tienen lugar en el

interior del plasma. La turbulencia existente produce un incremento enorme en los flujos de partículas y energía hacia el exterior del plasma.

Para producir reacciones de fusión de forma rentable y controlada en futuros reactores de fusión nuclear es necesario reducir el transporte turbulento. Para ello hay que identificar, en primer lugar, los mecanismos físicos que generan la turbulencia y descubrir qué parámetros del plasma afectan al transporte para, después, investigar la forma de poder influir sobre ellos y reducir o, incluso, suprimir la turbulencia.

Hoy en día, sabemos que un mecanismo reductor de la turbulencia está relacionado con la velocidad de deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  explicada anteriormente. Diversos experimentos realizados a lo largo de los últimos veinte años han confirmado la mejora en el confinamiento del plasma cuando dicha velocidad presenta un gradiente radial. Cuando esto ocurre, los flujos de partículas y de energía hacia la pared del dispositivo se reducen drásticamente y el plasma entra en un estado de confinamiento mejorado. Este descubrimiento es muy importante, ya que constituye un primer mecanismo capaz de reducir la turbulencia mediante la aplicación de campos eléctricos externos.

Para relacionar el comportamiento anómalo del transporte en plasmas de fusión nuclear con las fluctuaciones de los parámetros del plasma, los investigadores tratan de caracterizar dichas fluctuaciones midiendo sus niveles de amplitud, sus espectros de frecuencias y números de onda, sus longitudes y tiempos de correlación, etc. Sin embargo, tales medidas son difíciles y habitualmente están limitadas a la zona más externa del plasma. A continuación se describen brevemente algunos de los diagnósticos que habitualmente se emplean para caracterizar experimentalmente diversas magnitudes del plasma y sus fluctuaciones [2].

### *Sondas de Langmuir*

Las sondas de Langmuir son en la actualidad un diagnóstico básico de la zona periférica del plasma. Su nombre se debe al científico estadounidense Irving Langmuir quien en los años 20 diseñó un sistema capaz de medir la densidad, la temperatura electrónica y el potencial eléctrico en plasmas de baja temperatura.

Dicho sistema consiste en un pequeño electrodo que se inserta en el plasma y que se polariza a diversos potenciales. A partir de la corriente eléctrica medida en la sonda para

los diferentes potenciales aplicados, se pueden obtener los valores locales de la densidad y la temperatura electrónica y el potencial eléctrico del plasma. Estas sondas sólo pueden emplearse en la región más periférica del plasma donde la densidad y la temperatura del mismo son más bajas.

*Sonda de iones pesados: HIBP (Heavy Ion Beam Probe)*

Este diagnóstico permite obtener información local sobre la densidad y el potencial del plasma. Para ello, se inyecta en el plasma un haz de iones pesados (habitualmente  $\text{Cs}^+$ ) que por interacción con el plasma se ionizan nuevamente y se convierten en iones  $\text{Cs}^{++}$  comúnmente llamados iones secundarios. Debido al campo magnético del dispositivo, la trayectoria de los iones secundarios se modifica con respecto a la trayectoria inicial de los iones de  $\text{Cs}^+$ . El flujo total de iones secundarios que se recibe en el detector está relacionado con la densidad electrónica del plasma en la zona donde se generan los iones  $\text{Cs}^{++}$  y la diferencia de energía entre los iones  $\text{Cs}^+$  y  $\text{Cs}^{++}$  está relacionada con el potencial eléctrico en esa zona. Los principales problemas de este diagnóstico son su gran complejidad y su elevado coste.

*Espectroscopia de emisión: BES (beam emission spectroscopy)*

En esta técnica se inyecta en el plasma un haz de átomos neutros muy energéticos. Como consecuencia de la interacción con el plasma, los electrones de los átomos neutros pasan a niveles excitados. A partir de la medida de las fluctuaciones en la intensidad de la luz emitida por estos átomos excitados es posible obtener las fluctuaciones en la densidad del plasma. Este diagnóstico presenta dos inconvenientes fundamentalmente. Por un lado, para conseguir una resolución espacial buena es necesario un gran acceso al plasma y por otro lado, cuando la densidad del plasma es muy elevada, la intensidad de la luz emitida no varía de forma lineal con la densidad y el sistema llega a un estado de saturación.

*Reflectometría de microondas*

La reflectometría de microondas se ha aplicado a estudios de turbulencia en plasmas de fusión nuclear durante más de 15 años. La técnica se basa en la medida del

desfase que sufre una onda electromagnética con una determinada frecuencia cuando tras ser lanzada al plasma se refleja en él. Esta medida suministra información sobre la densidad electrónica del plasma y sus fluctuaciones en la zona de reflexión. Además, si se modifica la frecuencia de la onda incidente se puede medir la densidad del plasma y sus fluctuaciones en diferentes posiciones radiales.

En los últimos años se ha desarrollado una técnica de reflectometría conocida con el nombre de reflectometría Doppler que permite, entre otras cosas, obtener el valor de la velocidad de rotación perpendicular de las fluctuaciones de densidad en el plasma y su distribución radial. Como veremos posteriormente, esta velocidad de rotación del plasma está habitualmente dominada por la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  de las partículas y, por tanto, la medida experimental de la rotación del plasma puede, además, suministrar información sobre el campo eléctrico radial del plasma.

Las principales ventajas de la reflectometría de microondas son:

- Buena resolución espacial ( $\approx 1$  cm).
- Buena resolución temporal ( $< 10$   $\mu$ s).
- Fácil montaje experimental y poco espacio de acceso a la cámara de vacío.
- En principio, y dependiendo de los perfiles radiales de densidad y campo magnético del dispositivo, se puede medir en todo el plasma.
- Es un diagnóstico resistente a la radiación. Algo muy importante con vistas a futuras máquinas de fusión.

Estas ventajas convierten a la reflectometría de microondas en una técnica experimental muy atractiva para medir la densidad electrónica del plasma y sus fluctuaciones en ITER, pues combina una buena resolución espacial y temporal con un acceso reducido a la máquina. Sin embargo, aunque la reflectometría de microondas es capaz de suministrar información relativa a la densidad del plasma y sus fluctuaciones con una buena resolución espacial y temporal, uno de sus principales problemas es la interpretación de las medidas de fluctuaciones. En algunos experimentos, los resultados son validados o interpretados con ayuda de los obtenidos con otros diagnósticos, mientras que en otros muchos casos los resultados tienen que ser interpretados mediante modelos teóricos. La interpretación es relativamente sencilla cuando el nivel de

fluctuaciones es bajo y las longitudes de onda asociadas a las fluctuaciones son largas comparadas con la zona del plasma iluminada por la onda. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario recurrir a códigos numéricos que faciliten la interpretación de las medidas experimentales.

El trabajo que constituye esta memoria se enmarca dentro del campo de la diagnosis de plasmas mediante la reflectometría de microondas y, en particular, se centra en el desarrollo y en la aplicación de un código de onda completa que permite simular las medidas de reflectometría en plasmas con fluctuaciones de densidad.

La memoria está estructurada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se establecen los fundamentos físicos de la reflectometría de microondas. Se presentan las ecuaciones fundamentales que rigen la propagación de ondas electromagnéticas en plasmas magnetizados y se describen los dos modos de propagación que se emplean comúnmente: el modo ordinario y el modo extraordinario. Además, se describe una de las aplicaciones de la reflectometría de microondas: la reflectometría Doppler.

En el capítulo 3 se describe un método estándar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales: el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo. Posteriormente, se describe el código de onda completa en dos dimensiones que ha sido desarrollado íntegramente en este trabajo y que, basándose en el método de diferencias finitas, permite resolver las ecuaciones de Maxwell en un plasma magnetizado con fluctuaciones de densidad en modo extraordinario de propagación.

En el capítulo 4 se analiza, utilizando el código de onda completa, una asimetría natural que aparece en la propagación de ondas en plasmas magnetizados en modo extraordinario. Se estudia la importancia de esta asimetría en las medidas experimentales que se obtendrían en dos situaciones diferentes: plasmas cuyos parámetros son típicos de los dispositivos de fusión existentes en la actualidad y plasmas cuyos parámetros son característicos de los generados en pequeños dispositivos lineales de plasma.

En el capítulo 5 se describen algunos resultados obtenidos con el reflectómetro instalado en el dispositivo experimental TJ-II cuya interpretación se valida utilizando el código de onda completa.

En el capítulo 6 se emplea el código de onda completa para estudiar la capacidad de la reflectometría Doppler para medir la velocidad de rotación del plasma en dos escenarios extremos: plasmas con una curvatura alta, típicos de dispositivos de tamaño medio y plasmas sin curvatura, situación relevante para ITER. También se estudia el efecto de la curvatura del frente de onda, de la anchura espectral de la turbulencia y del ángulo de inclinación de las antenas.

Finalmente, se exponen las conclusiones más relevantes a las que ha dado lugar este trabajo.



## CAPÍTULO 2

# FUNDAMENTOS DE LA REFLECTOMETRÍA DE MICROONDAS.

### 2.1. INTRODUCCIÓN

La reflectometría de microondas se ha convertido en los últimos años en una técnica estándar para la medida de las propiedades del plasma relativas a su densidad electrónica. Básicamente, la técnica consiste en lanzar al plasma una o varias ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias que, tras recorrer una cierta distancia en el plasma, se reflejan en él cuando la densidad electrónica alcanza un valor crítico. La región del plasma en la que la onda se refleja se conoce con el nombre de capa de corte y las características de la onda reflejada, tanto su amplitud como su fase, nos suministran información sobre la densidad electrónica y sus fluctuaciones en dicha capa.

La técnica de la reflectometría de microondas aplicada a los plasmas de fusión nuclear tiene diversas aplicaciones de gran interés experimental. Las más utilizadas son:

- *Medida del perfil de densidad electrónica del plasma*

En este tipo de medidas, la frecuencia de la onda incidente se varía de forma progresiva cambiando de este modo la posición radial de la capa de corte. A partir de la frecuencia de la onda lanzada al plasma se puede determinar la densidad electrónica en la región del plasma donde ocurre la reflexión y a partir del desfase sufrido por la onda para cada frecuencia incidente es posible obtener la posición radial de las diferentes capas de corte. Es decir, mediante esta técnica es posible obtener el perfil radial de la densidad electrónica en el plasma. Un resumen de las diferentes técnicas experimentales empleadas en la reflectometría de microondas para la medida del perfil de densidad electrónica puede encontrarse en [3].

- *Medida de las fluctuaciones de densidad electrónica del plasma*

La segunda aplicación de la reflectometría de microondas la constituye su capacidad para caracterizar las fluctuaciones de densidad electrónica existentes en el plasma. Si la frecuencia de la onda incidente se mantiene constante, las variaciones en la fase de la onda reflejada son consecuencia de las fluctuaciones de densidad en la capa de corte y, en principio, es posible obtener información sobre las fluctuaciones de densidad a partir de las fluctuaciones en la fase. No obstante, la interpretación de las señales obtenidas experimentalmente es difícil y, en muchos casos, las características de las fluctuaciones de densidad tales como el nivel de fluctuaciones o el espectro de las mismas sólo se pueden describir desde un punto de vista meramente cualitativo.

- *Medida de la velocidad de propagación de las fluctuaciones de densidad*

En los últimos años, una técnica que ha demostrado ser capaz de suministrar información sobre la velocidad de propagación y sobre el espectro en números de onda de las fluctuaciones de densidad es la reflectometría Doppler [4-6]. En la actualidad, esta técnica constituye un área de investigación muy importante dentro del campo de la reflectometría de microondas. Las investigaciones que se realizan pretenden averiguar en qué condiciones experimentales la reflectometría Doppler suministra información precisa y fiable sobre las características de las fluctuaciones de densidad y en qué condiciones los resultados que se obtengan tienen un grado de incertidumbre más elevado. Como veremos en el capítulo 6 de esta memoria, numerosos aspectos relacionados con el plasma tales como la curvatura de la capa de corte, la anchura espectral de la turbulencia o el nivel de fluctuaciones de densidad y aspectos relacionados con las características de la onda incidente tales como la curvatura del frente de onda o el tamaño del haz influyen considerablemente en los resultados de las medidas Doppler. Debido a que el estudio de todas estas cuestiones es uno de los aspectos fundamentales que se tratan en esta memoria, al final de este capítulo se describe esta técnica.

A continuación describimos las bases teóricas más generales en las que se basa la reflectometría de microondas, mostrando las ecuaciones que rigen la propagación de ondas en plasmas magnetizados y describiendo los modos de propagación.

## 2.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN PLASMAS MAGNETIZADOS

### 2.2.1. Introducción

Con objeto de entender la técnica de la reflectometría de microondas aplicada a los plasmas de fusión, se hace necesario comprender bien las características de la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma magnetizado. La geometría complicada de los dispositivos de fusión, especialmente de los stellarators, junto con los fenómenos turbulentos presentes en los plasmas, complica enormemente cualquier solución analítica de las ecuaciones de Maxwell. Además, para poder estudiar numéricamente la propagación de ondas electromagnéticas en este tipo de medios son necesarias una serie de hipótesis que permitan simplificar la complejidad de las ecuaciones.

En primer lugar, trataremos al plasma como un medio continuo. Esto está justificado ya que la longitud de onda típica de las ondas utilizadas en reflectometría es de unos pocos milímetros, mientras que la distancia media entre las partículas es mucho menor.

En segundo lugar, sólo se considera el movimiento de los electrones bajo la acción del campo electromagnético de la onda. Los iones, mucho más masivos que los electrones, no pueden seguir esas variaciones de alta frecuencia (decenas de GHz) debido a su gran inercia y, por tanto, se suponen fijos en el plasma.

Finalmente, consideraremos la aproximación de plasma frío. Dicha aproximación consiste en despreciar el movimiento térmico de los electrones y las colisiones entre las diferentes partículas (electrones, iones e impurezas) existentes en el plasma. Esta aproximación se satisface a temperaturas inferiores a unos pocos keV. Para temperaturas superiores, como las alcanzadas en el tokamak JET se ha de tener en cuenta, además, la corrección relativista.

La presencia de un campo magnético en los dispositivos de fusión hace del plasma un medio anisótropo, con lo cual la conductividad y permitividad dieléctrica del mismo son tensores.

Por otro lado, el campo magnético (del orden de unos pocos Teslas) es muy superior al asociado a la onda que se propaga por el plasma y, por lo tanto, el último se puede despreciar.

El plasma se considera un medio que puede conducir corrientes pero que por lo demás está gobernado por las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Estas ecuaciones en su forma diferencial son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Faraday} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{m}_0 \vec{J} + \vec{m}_0 \vec{e}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Ampere} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{r}}{\vec{e}_0}, \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \quad (2.4)$$

En estas expresiones,  $\vec{E}$  es la intensidad de campo eléctrico (V/m),  $\vec{B}$  es la inducción magnética (T),  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica (A/m<sup>2</sup>),  $\vec{r}$  es la densidad de carga (C/m<sup>3</sup>),  $\vec{e}_0$  es la permitividad dieléctrica del espacio libre (F/m) y  $\vec{m}_0$  es su permeabilidad magnética (H/m).

Además, tenemos la ecuación de movimiento de los electrones en presencia de campos eléctricos y magnéticos:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad \text{Ley de Lorentz} \quad (2.5)$$

donde,  $e$  es el valor absoluto de la carga del electrón,  $m_e$  su masa,  $\vec{v}$  su velocidad y  $\vec{B}_0$  el campo magnético del dispositivo<sup>§</sup>.

---

<sup>§</sup> Por abuso del lenguaje, la magnitud  $\vec{B}_0$  se conoce habitualmente con el nombre de campo magnético del dispositivo cuando en realidad debería hablarse de inducción magnética.

Dado que la densidad de corriente es el producto de la densidad de carga electrónica por la velocidad de los electrones, el sistema anterior (2.1)-(2.5) constituye un sistema de ecuaciones cuya solución nos permite obtener las características de la propagación de la onda en el plasma. El método empleado para resolver estas ecuaciones se describirá en detalle en el capítulo 3. Por ahora, sólo queremos mostrar las características más relevantes de las ondas electromagnéticas que se propagan por el plasma.

En lo que sigue se utilizará un sistema de coordenadas cartesianas (X,Y,Z) en el que, el eje Z se encuentra en la dirección del campo magnético del dispositivo y los ejes X,Y son mutuamente perpendiculares y están contenidos en un plano perpendicular al campo magnético.

Consideremos una onda plana de la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$  con número de onda  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $E_0$ , que se propaga en un plasma estático (sin fluctuaciones de densidad). Supongamos también que el plasma presenta un gradiente de densidad en la dirección del eje X y se encuentra inmerso en un campo magnético externo,  $\vec{B}_0$ , uniforme en la dirección del eje Z. A partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Lorentz se puede ver que las componentes del campo eléctrico en las tres direcciones del espacio verifican las siguientes expresiones [7]:

$$(k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2)E_x + ik_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + ik_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{k}^2 E_y = 0 \quad (2.6)$$

$$ik_y \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{i\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{k}^2 E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_z^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2)E_y - k_y k_z E_z = 0 \quad (2.7)$$

$$ik_z \frac{\partial E_x}{\partial x} - k_y k_z E_y - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (k_y^2 - k_0^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2})E_z = 0 \quad (2.8)$$

En estas expresiones,  $E_x, E_y, E_z$  son las componentes del campo eléctrico de la onda en cada uno de los ejes de coordenadas,  $k_0 = \omega/c$  es el número de onda en vacío, y el parámetro  $\mathbf{k}(x)$  se define mediante la expresión  $\mathbf{k}^2(x) = k_0^2(\omega_{pe}^2/(\omega^2 - \omega_{ce}^2))$ , donde, por definición,  $\omega_{pe} = \sqrt{n_e e^2 / (\epsilon_0 m_e)}$  se conoce con el nombre de frecuencia de

plasma para los electrones y  $\omega_{ce} = eB_0/m_e$  es la frecuencia ciclotrónica de los electrones.

A continuación estudiaremos los modos de propagación de la onda en el plasma. Nos restringiremos al caso en el que la onda incide perpendicularmente al campo magnético del dispositivo ( $k_z = 0$ ) y estudiaremos los dos casos que habitualmente se emplean en la reflectometría de microondas: incidencia perpendicular a las superficies de densidad constante e incidencia oblicua.

El caso  $k_z \neq 0$  corresponde a una onda cuyo vector de ondas  $\vec{k}$  tiene una componente en la dirección paralela al campo magnético  $\vec{B}_0$  del dispositivo y, por tanto, corresponde a una onda que incide oblicuamente con respecto a  $\vec{B}_0$ . En este caso, los modos que se pueden propagar por el plasma vienen determinados por la relación de Appleton-Hartree [8] y las características de este tipo de propagación puede encontrarse en diversos libros de texto [8-10]. Dado que este modo de propagación no se emplea en reflectometría, no se discutirá en esta memoria.

### 2.2.2. Incidencia perpendicular a las superficies de densidad constante

$$(k_x \neq 0, k_y = k_z = 0)$$

Si la onda incide perpendicularmente al campo magnético y a las superficies de densidad constante del plasma, el conjunto de ecuaciones (2.6-2.8) se puede desacoplar en dos conjuntos de ecuaciones o modos de propagación independientes. Estos modos de propagación independientes se conocen con los nombres de modo ordinario y modo extraordinario.

#### 2.2.2.1. Modo Ordinario en incidencia normal (modo O)

En este caso, la onda tiene su campo eléctrico polarizado paralelamente al campo magnético del dispositivo. La distribución espacial del campo eléctrico viene determinada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2(x)}{\mathbf{w}^2} \right) E_z = 0 \quad (2.9)$$

La magnitud  $\mathbf{e}_o = (1 - \mathbf{w}_{pe}^2(x)/\mathbf{w}^2)$  representa la constante dieléctrica del medio para la propagación en modo ordinario con incidencia normal. El índice de refracción  $\mathbf{h}_o$  del medio se define a partir de la constante dieléctrica mediante la expresión  $\mathbf{h}_o^2 = \mathbf{e}_o$ .

Como podemos observar en la expresión (2.9), la constante dieléctrica depende de la densidad del plasma en cada punto; sin embargo, no depende del campo magnético del dispositivo. Esto se debe a que el movimiento de los electrones provocado por el campo eléctrico de la onda se produce en una dirección paralela al campo magnético y su movimiento no se ve afectado por el mismo.

La expresión (2.9) también muestra que la onda sólo puede propagarse por el plasma si la constante dieléctrica del medio cumple  $\mathbf{e}_o > 0$ . La región del plasma en la que  $\mathbf{e}_o = 0$  corresponde a una zona del plasma en la que la onda se refleja mientras que la región con  $\mathbf{e}_o < 0$ , corresponde a una zona evanescente en la que la amplitud de la onda va perdiendo intensidad a medida que se propaga por ella. En esta zona, la onda se atenúa completamente tras recorrer una distancia igual a unas pocas longitudes de onda.

La posición de la capa de corte ( $\mathbf{e}_o = 0$ ) viene determinada por la condición  $\mathbf{w}_{pe}(x) = \mathbf{w}$ . Es decir, su posición radial en el plasma depende exclusivamente del perfil de densidad electrónica del plasma y de la frecuencia de la onda incidente.

#### 2.2.2.2. Modo Extraordinario en incidencia normal (modo X)

Este modo de propagación se tiene cuando el campo eléctrico de la onda se encuentra polarizado en el plano XY perpendicular al campo magnético del dispositivo. La distribución espacial de las componentes  $E_y$  y  $E_x$  del campo eléctrico puede obtenerse mediante las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_0^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2(x)}{\mathbf{w}^2} \frac{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{pe}^2(x)}{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2(x)} \right) E_y = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{\mathbf{w}_{ce}}{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}_{pe}^2(x)}{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2(x)} \quad (2.11)$$

donde la frecuencia  $\mathbf{w}_{uh}$  se conoce con el nombre de frecuencia híbrida superior y se define a partir de la frecuencia de plasma para los electrones y la frecuencia ciclotrónica electrónica mediante la expresión  $\mathbf{w}_{uh}^2 = \mathbf{w}_{pe}^2 + \mathbf{w}_{ce}^2$ .

La característica más interesante de este modo es que la onda en su propagación por el plasma presenta una componente electromagnética ( $E_y$  es perpendicular a la dirección de propagación) y otra componente electrostática ( $E_x$  es paralelo a la dirección de propagación). Este fenómeno ocurre incluso cuando el campo eléctrico de la onda en vacío tiene solamente la componente  $E_y$ .

La constante dieléctrica del medio para la propagación en modo X con incidencia normal viene dada por  $\mathbf{e}_x = 1 - (\mathbf{w}_{pe}^2 / \mathbf{w}^2)(\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{pe}^2) / (\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2)$  y el índice de refracción  $\mathbf{h}_x$  del medio se define, análogamente al modo O, mediante:  $\mathbf{h}_x^2 = \mathbf{e}_x$ .

Como podemos observar en la expresión (2.10), la constante dieléctrica para el modo X depende de la densidad del plasma y del campo magnético del dispositivo. Esto se debe a que en este caso los electrones se mueven en un plano perpendicular al campo magnético del dispositivo y, por tanto, su movimiento se ve afectado por el campo magnético.

Al igual que ocurre en el modo ordinario, el modo extraordinario presenta una región en la que la onda puede propagarse ( $\mathbf{e}_x > 0$ ) y una región evanescente ( $\mathbf{e}_x < 0$ ) en la que la amplitud de la onda disminuye con la distancia. La región de corte en la propagación de la onda se produce cuando  $\mathbf{e}_x = 0$ . A partir de esta condición, es fácil

ver que hay dos regiones de corte, la región llamada de corte alto y la región de corte bajo. El corte alto viene dado por la expresión  $(\omega_{pe}^2/\omega^2) = 1 - (\omega_{ce}/\omega)$  mientras que la posición del corte bajo se obtiene mediante la expresión  $(\omega_{pe}^2/\omega^2) = 1 + (\omega_{ce}/\omega)$ . Además, y a diferencia de lo que ocurre en el modo ordinario, existe una región del plasma en la que la constante dieléctrica se hace infinita ( $\epsilon_x \rightarrow \infty$ ). Dicha región, en la que la onda es absorbida por el plasma, se conoce con el nombre de resonancia y su posición viene determinada por la condición  $(\omega_{pe}^2/\omega^2) = 1 - (\omega_{ce}^2/\omega^2)$ , que se cumple cuando la frecuencia de la onda es igual que la frecuencia híbrida superior del plasma  $\omega = \omega_{uh}$ . En la región de resonancia, la amplitud del campo eléctrico crecería indefinidamente en ausencia de colisiones entre las diferentes especies del plasma.

Hay que resaltar que en modo X, las frecuencias de corte y la posición de la resonancia dependen no sólo del valor de la densidad del plasma como ocurría en el modo O, sino que también dependen del valor del campo magnético. Por tanto, para calcular la posición de corte es preciso conocer el perfil radial de campo magnético del dispositivo.

Para las condiciones típicas de los plasmas de fusión en los dispositivos actuales, estas frecuencias de corte se encuentran en la banda 10-110 GHz.

Es interesante observar que si hacemos  $B_0 = 0$ , la onda se comporta de forma idéntica a como lo haría el modo O. La posición de la capa de corte es la misma en ambos casos y la resonancia desaparece. Esto es lógico puesto que si se elimina el campo magnético los electrones oscilan sin verse afectados por el campo magnético del dispositivo y la componente longitudinal  $E_x$  de la onda no existe. Sin embargo, como veremos posteriormente, la ausencia de campo magnético exclusivamente no garantiza que el modo extraordinario y el modo ordinario se comporten de igual forma en incidencia oblicua.

A continuación estudiamos el modo ordinario y el modo extraordinario cuando inciden de forma oblicua a la capa de corte del plasma.

### 2.2.3. Incidencia oblicua a las superficies de densidad constante

$$(k_x \neq 0, k_y \neq 0, k_z = 0)$$

En este caso, la dirección de propagación de la onda no coincide con la dirección del gradiente de densidad sino que forma un ángulo  $\mathbf{q}_0$  con ella.

Las ecuaciones (2.6-2.8) se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(k_y^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2)E_x + ik_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{i\mathbf{w}_{ce}}{\mathbf{w}} \mathbf{k}^2 E_y = 0 \quad (2.12)$$

$$ik_y \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{i\mathbf{w}_{ce}}{\mathbf{w}} \mathbf{k}^2 E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\mathbf{k}^2 - k_0^2)E_y = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2(x)}{\mathbf{w}^2} - \sin^2 \mathbf{q}_0 \right) E_z = 0 \quad (2.14)$$

Para obtener la expresión (2.14) se ha de tener en cuenta que el gradiente de densidad se encuentra en la dirección del eje X y, por tanto, de acuerdo con la ley de Snell, la componente  $k_y$  del número de onda permanece constante durante la propagación de la onda por el plasma. Es decir,  $k_y = k_0 \sin \mathbf{q}_0$ .

#### 2.2.3.1. Modo Ordinario en incidencia oblicua

Corresponde a una onda con el campo eléctrico polarizado en la dirección paralela al campo magnético y que se propaga perpendicularmente al mismo con un ángulo de incidencia,  $\mathbf{q}_0$ , respecto a la normal a las superficies de corte. Dicho modo viene descrito por la ecuación (2.14).

Como consecuencia de la incidencia oblicua, el corte se produce en una región del plasma donde se cumple que  $1 - (\mathbf{w}_{pe}^2(x)/\mathbf{w}^2) - \sin^2 \mathbf{q}_0 = 0$ . Es decir, donde el índice de refracción, definido anteriormente para el modo ordinario en incidencia normal, verifica la condición:  $\mathbf{h}_o = \sin \mathbf{q}_0$ . Esto significa que, bajo incidencia oblicua, la

posición de la capa de corte se desplaza radialmente hacia densidades menores puesto que el corte se produce a una frecuencia de plasma más baja ( $\omega_{pe}/\omega = \cos\theta_0$ ). Su posición exacta dependerá exclusivamente del perfil de densidad, del ángulo de inclinación y de la frecuencia de la onda incidente.

### 2.2.3.2. Modo Extraordinario en incidencia oblicua

En este caso, el campo eléctrico de la onda se encuentra polarizado en un plano XY, perpendicular al campo magnético del dispositivo y se propaga con un ángulo  $\theta_0$  respecto a la normal a las superficies de corte. La distribución espacial de las componentes  $E_y$  y  $E_x$  del campo eléctrico puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.12) y (2.13). Si se elimina la componente  $E_x$  de estas ecuaciones, la componente  $E_y$  de la onda satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 E_y}{ds^2} + p(s) \frac{dE_y}{ds} + q(s) E_y = 0, \quad s = k_0 x \quad (2.15)$$

con

$$p(s) = \frac{d}{ds} (\omega_{pe}^2) \frac{\sin^2 \theta_0}{(\omega^2 - \omega_{uh}^2) (\cos^2 \theta_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2})} \quad (2.16)$$

y

$$q(s) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{uh}^2} - \sin^2 \theta_0 - \frac{d}{ds} (\omega_{pe}^2) \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\sin \theta_0 \cos^2 \theta_0}{(\omega^2 - \omega_{uh}^2) (\cos^2 \theta_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2})} \quad (2.17)$$

donde la coordenada adimensional  $s$  es proporcional a la coordenada X normalizada con la longitud de onda en vacío.

Los dos primeros términos en el miembro derecho de la ecuación (2.17) representan la constante dieléctrica del medio para incidencia normal, el tercer término

tiene en cuenta la modificación debida al ángulo de inclinación  $\mathbf{q}_0$ . Además, como consecuencia del ángulo de inclinación no nulo y la presencia de un gradiente de densidad se ha de incluir el último término en (2.17) y el término  $p(s)dE_y/ds$  en (2.15).

Si hacemos el campo magnético del dispositivo igual a cero ( $\mathbf{w}_{ce} = 0$ ), la expresión que se obtiene para la componente  $E_y$  es diferente que la que obtuvimos para el modo ordinario en incidencia oblicua debido al término  $p(s)dE_y/ds$ . Es decir, el modo X en incidencia oblicua sin campo magnético no es equivalente al modo O en incidencia oblicua. Esto se debe a que, debido la inclinación del haz, existe una componente del campo eléctrico paralela al gradiente de densidad que provoca un desplazamiento neto de carga a lo largo de la dirección de dicho gradiente. Como consecuencia de la inhomogeneidad del plasma, este desplazamiento genera una componente longitudinal del campo eléctrico de la onda y ésta no puede permanecer puramente electromagnética (como ocurría en modo X con incidencia normal y campo magnético nulo).

En el caso de tener un gradiente de densidad muy pequeño y cuando la frecuencia de la onda esté lejos de la resonancia híbrida superior, es decir, si  $p(s) \approx 0$  y  $q(s) \approx \mathbf{e}_x - \sin^2 \mathbf{q}_0$ , la onda presenta dos cortes en  $(\mathbf{w}_{pe}^2/\mathbf{w}^2) = 1 \pm (\mathbf{w}_{ce}/\mathbf{w}) \cos \mathbf{q}_0$ . Estas expresiones son muy parecidas a las obtenidas para modo X en incidencia normal, con una pequeña corrección debida al ángulo de inclinación. Bajo esta aproximación, la resonancia ocurre también cuando la frecuencia híbrida superior del plasma coincide con la frecuencia de la onda incidente ( $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{uh}$ ).

En el caso más general la ecuación (2.15) debe ser resuelta numéricamente para obtener la posición del corte y la resonancia.

En el capítulo 4 de esta memoria se presenta un estudio sobre la asimetría que aparece en la propagación del modo X en incidencia oblicua y sus efectos en las señales de reflectometría.

#### 2.2.4. Propagación de ondas en presencia de fluctuaciones de densidad

Las ecuaciones que se han mostrado en los apartados anteriores describen la propagación de ondas en modo ordinario y en modo extraordinario en un plasma estático (sin fluctuaciones de densidad). Sin embargo, los plasmas de fusión presentan fluctuaciones en la densidad del plasma que afectan a las características de propagación y reflexión de las ondas y, por tanto, tienen que ser consideradas en las ecuaciones. Las características de la onda reflejada dependen no sólo de las fluctuaciones de densidad en la capa de corte sino que también dependen de aquellas que se producen a lo largo de todo el recorrido de la onda en el plasma. Esto significa que para interpretar correctamente las señales de reflectometría es necesario determinar en qué medida las características de la onda reflejada dependen de las fluctuaciones de densidad en la capa de corte y en qué medida dependen de aquellas en la zona de propagación. Los estudios realizados hasta la fecha predicen que las características de la onda reflejada vienen determinadas fundamentalmente por las fluctuaciones existentes en la capa de corte. No obstante, el problema de la resolución espacial de las medidas cuando los niveles de turbulencia son elevados sigue siendo un tema de investigación importante. La principal dificultad del problema se debe a que no existe una solución analítica exacta cuando se tienen en cuenta las fluctuaciones en la densidad del plasma. Incluso cuando éstas no se consideran, sólo existen soluciones analíticas exactas para propagación en modo ordinario con determinados tipos de perfiles radiales de densidad (por ejemplo, perfiles lineales o parabólicos) [9]. Por ello, es necesario considerar ciertas simplificaciones adicionales que permitan resolver el problema de forma aproximada, ya sea analíticamente o bien mediante el empleo de métodos numéricos.

Las simplificaciones adicionales que habitualmente suelen emplearse son:

1. Las frecuencias características de las fluctuaciones de densidad en los plasmas de fusión se encuentran en el rango de unos pocos kHz a cientos de kHz. Sin embargo, la frecuencia de las ondas que se emplean en reflectometría se encuentran en el rango de las decenas de GHz. Por este motivo, la propagación de ondas en un plasma con fluctuaciones de densidad puede tratarse sin considerar las variaciones temporales de los parámetros del plasma; las

fluctuaciones de densidad son variaciones espaciales que se superponen al perfil de densidad promedio del plasma.

2. Las fluctuaciones de densidad ocurren en las tres direcciones del espacio: radial, perpendicular y paralela al campo magnético del dispositivo. Generalmente, el transporte de partículas y de energía en la dirección paralela al campo magnético es muy rápido y las variaciones espaciales de la densidad a lo largo de esta dirección son muy suaves y pueden despreciarse. Sin embargo, no ocurre lo mismo en las direcciones radial y perpendicular al campo magnético, lo que hace que sea necesario resolver la ecuación de ondas en dos dimensiones.
3. Si la amplitud de las fluctuaciones de densidad es pequeña comparada con el valor local de la densidad es posible emplear la aproximación de Born para resolver analíticamente el problema. Sin embargo, el nivel de fluctuaciones de densidad en los dispositivos de fusión nuclear puede ser relativamente alto, especialmente en la zona periférica del plasma, y la aproximación de Born no es aplicable en estos casos.
4. Si la variación espacial de los parámetros del plasma es lenta en comparación con la longitud de onda de la onda incidente se puede emplear la aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) [9] para resolver las ecuaciones. Sin embargo, el índice de refracción varía considerablemente en las proximidades de la capa de corte y la aproximación WKB no describe adecuadamente el comportamiento de la onda en esa región del plasma.

Los primeros modelos que se desarrollaron para interpretar las medidas de turbulencia obtenidas con reflectometría de microondas fueron modelos unidimensionales [11-14]. Estos modelos consideran únicamente variaciones espaciales de la densidad en la dirección de propagación de la onda. Sin embargo, pronto se vio que muchas de las predicciones realizadas por estos modelos unidimensionales no coincidían con los resultados experimentales y se hizo necesario desarrollar modelos en dos dimensiones (2D). Estos modelos resuelven la ecuación de ondas analíticamente bajo la aproximación de Born [15, 16] o numéricamente empleando la aproximación WKB [17-19] y son capaces de explicar algunos de los fenómenos experimentales

observados. Entre ellos se encuentra el fenómeno conocido con el nombre de deriva de la fase: la fase de la onda crece o decrece de forma monótona incluso cuando el desplazamiento radial promedio de la capa de corte es nulo. Las primeras observaciones experimentales de este fenómeno resultaron desconcertantes para los científicos puesto que los desplazamientos radiales necesarios para provocar la variación observada en la fase de la onda deberían ser muy grandes; algo que desde el punto de vista experimental se sabía que no estaba ocurriendo. Los primeros modelos 2D explicaron este fenómeno y lo relacionaron directamente con la rotación del plasma [4, 20]. Estas observaciones experimentales constituyeron el origen de la reflectometría Doppler cuyos fundamentos se describen a continuación.

### 2.3. REFLECTOMETRÍA DOPPLER

La reflectometría Doppler permite medir la velocidad de propagación y el espectro en números de onda de las fluctuaciones de densidad del plasma.

El principio de la reflectometría Doppler [4-6] se puede explicar considerando al plasma una red de difracción caracterizada por un número de onda,  $\vec{k}$ , con  $k = 2\mathbf{p}/\mathbf{l}$ , donde  $\mathbf{l}$  es la periodicidad espacial de la red de difracción. Es decir, la radiación de microondas que incide en el plasma es dispersada por el mismo de una forma muy similar a como lo haría una red de difracción. La técnica Doppler aplicada a los plasmas de fusión hace uso de una inclinación deliberada de la antena con respecto a la perpendicular a las superficies de densidad constante del plasma (incidencia oblicua). De esta forma, la radiación incidente en el plasma es dispersada en los diferentes órdenes de difracción de acuerdo con la ley de Bragg:  $k_0(\sin \mathbf{q}_0 - \sin \mathbf{q}_d) = mk$  ( $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ), donde  $k_0$  es el número de onda de la radiación incidente,  $\mathbf{q}_0$  es el ángulo de incidencia,  $\mathbf{q}_d$  es el ángulo de dispersión de la radiación,  $m$  es el orden de difracción y  $k$  el número de onda asociado a la red. El orden de difracción  $m = 0$  corresponde a la reflexión especular de la onda en la capa de corte, es decir, la radiación es dispersada según un ángulo  $\mathbf{q}_d = \mathbf{q}_0$ . Los restantes órdenes de difracción aparecen distribuidos angularmente a ambos lados del valor  $\mathbf{q}_0$  y la separación angular entre ellos

depende del número de orden de difracción, de la longitud de onda incidente y de la periodicidad espacial de la red.

Utilizando una sola antena como emisora y receptora, la antena recibe únicamente la radiación dispersada según un ángulo  $\mathbf{q}_d = -\mathbf{q}_0$ , es decir, recibe sólo la radiación que vuelve a la antena siguiendo el mismo recorrido que la radiación incidente pero en sentido contrario. De acuerdo con esto, el sistema selecciona preferentemente aquellos números de onda que verifiquen la condición  $2k_0 \sin \mathbf{q}_0 = mk$ . Es decir, selecciona el primer orden difractado por aquellas fluctuaciones de densidad con número de onda  $k = 2k_0 \sin \mathbf{q}_0$  y órdenes superiores de difracción provocados por fluctuaciones de densidad con números de onda  $k/2$  ( $m = 2$ ),  $k/3$  ( $m = 3$ ), etc.

En el caso de utilizar dos antenas, una emisora y otra receptora, el sistema se comporta de forma idéntica que en el caso anterior pero el ángulo  $\mathbf{q}_0$ , es el ángulo formado por la bisectriz de las líneas de visión de cada antena y la perpendicular al plasma.

La propagación de las fluctuaciones de densidad en el plasma con una determinada velocidad  $\vec{v}$  también puede interpretarse como el movimiento de la red de difracción en el espacio con esa misma velocidad. Como consecuencia de la incidencia oblicua, la frecuencia de la onda dispersada según el primer orden de difracción presenta un desplazamiento Doppler con respecto a la incidente que viene dado por:  $\mathbf{w}_D = \vec{v}\vec{k}$ , donde  $\mathbf{w}_D$  es el desplazamiento Doppler en radianes por segundo. Si expresamos la velocidad y el número de onda en función de las tres coordenadas habitualmente empleadas en los plasmas de fusión: la componente paralela al campo magnético  $\vec{B}_0$  del dispositivo,  $v_{//}$ ,  $k_{//}$  y las otras dos componentes en un plano perpendicular a  $\vec{B}_0$ : componente radial,  $v_r$ ,  $k_r$  y perpendicular  $v_{\perp}$ ,  $k_{\perp}$ , dicho desplazamiento viene dado por la expresión:  $\mathbf{w}_D = v_{\perp}k_{\perp} + v_{//}k_{//} + v_r k_r$ .

En los plasmas de fusión, las fluctuaciones de densidad suelen tener longitudes de onda en la dirección paralela al campo magnético muy grandes comparadas con las existentes en el plano perpendicular a  $\vec{B}_0$ , y, por tanto, el término  $v_{//}k_{//}$  puede despreciarse. Esto es debido al transporte rápido de partículas y de energía que existe a lo largo de las líneas de campo magnético. Por otro lado, el espectro radial de las

fluctuaciones puede despreciarse porque se encuentra normalmente centrado en torno a  $k_r \approx 0$ . Esto se debe a que los desplazamientos radiales de la capa de corte ocurren en los dos sentidos y en promedio el desplazamiento radial es nulo. Como consecuencia de ello, el desplazamiento radial de la capa de corte no provoca ningún desplazamiento Doppler neto en la frecuencia y su efecto puede despreciarse. Por tanto, la radiación es dispersada fundamentalmente por aquellas fluctuaciones de densidad con número de onda en la dirección perpendicular que cumplen  $k_{\perp} = 2k_0 \sin \mathbf{q}_0$  y el desplazamiento Doppler es  $f_D = v_{\perp} (2/I_0) \sin \mathbf{q}_0$ . Los restantes ordenes de difracción correspondientes a números de onda  $k/2$ ,  $k/3$ , etc y que son dispersados en la misma dirección que el primer orden, tendrán el mismo desplazamiento Doppler siempre que las fluctuaciones de densidad se propaguen con una velocidad de grupo común. Finalmente, el sentido del desplazamiento Doppler nos indica el sentido de rotación del plasma.

La reflectometría Doppler permite también medir el espectro en números de onda de las fluctuaciones de densidad. La amplitud del primer orden de difracción contiene información sobre la amplitud de las fluctuaciones de densidad cuyo número de onda coincide con el número de onda seleccionado por el diagnóstico. Por tanto, variando el ángulo de inclinación de la antena en un amplio rango de valores es posible, en principio, obtener el espectro en números de onda de las fluctuaciones de densidad del plasma. La amplitud de los restantes órdenes de difracción es inferior a la amplitud del primer orden y su efecto en la medida del espectro puede despreciarse. Sin embargo, como veremos en el capítulo 6, la relación entre la amplitud del primer orden de difracción y el nivel de fluctuaciones puede no ser lineal en el rango de números de onda seleccionados por el diagnóstico.

### *Significado físico de la velocidad medida*

La velocidad medida con esta técnica tiene dos contribuciones. Por un lado tenemos la velocidad del fluido (plasma) en el sistema de laboratorio. Esta velocidad habitualmente viene determinada por la deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  existente en los plasmas de fusión. Como vimos en el capítulo 1, esta deriva provoca un movimiento macroscópico del plasma en la dirección perpendicular al campo eléctrico del plasma y al campo magnético del dispositivo. Así pues, la componente radial del campo eléctrico,  $E_r$ ,

provoca un movimiento de deriva de las partículas cargadas en la dirección que es sensible el reflectómetro, la dirección perpendicular. Por otro lado, tenemos la velocidad de fase de las fluctuaciones de densidad en el sistema de referencia del fluido  $v_{fase}$ . Considerando estas dos contribuciones, la velocidad medida por el reflectómetro puede escribirse como  $v_{\perp} = v_{ExB} + v_{fase}$ .

Una medida de la velocidad de fase y su dirección puede aportar información sobre el tipo de turbulencia presente en el plasma, mientras que la medida de la velocidad  $v_{ExB}$  suministra información sobre el valor del campo eléctrico radial del plasma. La velocidad de deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  puede medirse con espectroscopia, o con el diagnóstico HIBP y la velocidad total  $v_{\perp}$  con reflectometría. Habitualmente se cumple que en las condiciones típicas de los dispositivos de fusión y en la zona de medida de los reflectómetros  $v_{ExB} \gg v_{fase}$  y, por tanto, la velocidad medida con reflectometría viene determinada en su mayor parte por la velocidad del fluido [21]. Además, la medida de  $v_{\perp}$  permite obtener información sobre el campo eléctrico radial en el interior del plasma puesto que  $E_r \approx v_{\perp} B_0$ .

En resumen, la antena de un reflectómetro Doppler se comporta como un filtro pasa-banda en el espacio de números de onda de las fluctuaciones de densidad centrado en el valor dado por la ley de Bragg. Las medidas realizadas con el reflectómetro suministran información sobre la velocidad de rotación del plasma y el espectro de las fluctuaciones de densidad. Sin embargo, al igual que sucede con las medidas de fluctuaciones realizadas con reflectómetros convencionales, su interpretación no siempre es sencilla y requiere ser contrastada con los resultados de las simulaciones.

En los últimos años se han comenzado a desarrollar códigos bidimensionales denominados de “onda completa”. Estos códigos permiten resolver las ecuaciones de Maxwell sin tener que asumir un nivel bajo de fluctuaciones de densidad y, además, describen correctamente el comportamiento de la onda en la capa de corte. Esto ha sido posible gracias al extraordinario desarrollo que han experimentado los computadores en los últimos años. Hoy en día, es posible resolver las ecuaciones de Maxwell empleando tiempos de cálculo aceptables para cualquier perfil de densidad con fluctuaciones de

cualquier tipo. En este trabajo se ha desarrollado un código de onda completa en dos dimensiones que permite resolver la propagación de ondas en modo extraordinario en plasmas magnetizados con fluctuaciones de densidad. En el siguiente capítulo se presenta un análisis detallado del código, mientras que su aplicación a estudios concretos sobre la reflectometría de microondas se describirá en los capítulos 4, 5 y 6.



## **CAPÍTULO 3**

### **DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DE ONDA COMPLETA EN DOS DIMENSIONES PARA PROPAGACIÓN EN MODO EXTRAORDINARIO**

Como ya se ha comentado, la complejidad de las ecuaciones que describen la propagación de ondas en plasmas magnetizados con turbulencia, ha llevado al desarrollo de métodos numéricos que permitan resolver la ecuación de ondas en este tipo de medios. El objetivo del código desarrollado en este trabajo es múltiple. Por un lado, se trata de crear una herramienta capaz de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos experimentalmente; por otro lado, el código permite el diseño y optimización de nuevos sistemas de reflectometría, y además permite realizar estudios básicos sobre la influencia que factores diversos como las características del plasma o del haz tiene sobre los diferentes tipos de medidas.

Mientras que muchos de los reflectómetros instalados en los diversos dispositivos experimentales emplean el modo extraordinario, la mayoría de los códigos bidimensionales de onda completa que se emplean en el estudio de la reflectometría simulan la propagación de ondas con polarización en modo ordinario [22]. Esto se debe, fundamentalmente, a que las ecuaciones que describen la propagación de la onda en modo ordinario son más sencillas que las que describen el modo extraordinario y, por tanto, requieren un tiempo de cálculo menor. El coste computacional involucrado en la resolución de las ecuaciones en modo extraordinario se debe a la interacción que existe entre el campo magnético del dispositivo y el movimiento de los electrones provocado por la onda.

El código que se describe en este capítulo [23] es un código de onda completa en dos dimensiones que resuelve las ecuaciones asociadas a la propagación en modo extraordinario. El desarrollo del código es original y sólo existen otros dos códigos de características similares que resuelven directamente las ecuaciones del modo

extraordinario [24, 25]. Sin embargo, ninguno de estos códigos se ha empleado para realizar el tipo de estudios que se presentan en esta memoria. También existe otro código [26] que resuelve la propagación de la onda en modo extraordinario. Sin embargo, este código utiliza una serie de aproximaciones y como consecuencia sólo puede emplearse cuando la onda incidente se puede expresar como una superposición de ondas planas cuyos vectores de onda son aproximadamente paralelos a la perpendicular al plasma. La ventaja principal de este código es que permite resolver la ecuación de ondas en plasmas generados en dispositivos de fusión de grandes dimensiones empleando un tiempo de cálculo muy pequeño. Típicamente, la solución a la ecuación de ondas se obtiene en unas decenas de minutos.

El tiempo de cálculo del código que se describe en este capítulo, aunque es superior al necesario en códigos de onda completa con modo ordinario y al necesario en [26], no es excesivo. El código puede utilizarse para realizar estudios de reflectometría en dispositivos experimentales de tamaño medio con tiempos de cálculo asequibles. Típicamente, unas siete horas en un ordenador personal con un procesador Pentium 4 a 3 GHz de velocidad y 1 GB de memoria RAM.

En este capítulo, se presentan los detalles de la implementación numérica de la solución de las ecuaciones de Maxwell que describen el modo extraordinario de propagación en el dominio del tiempo empleando el método de las diferencias finitas, FDTD (Finite-Difference Time-Domain) [27]. Como veremos, son muchos los requisitos para obtener una solución fiable del problema y no son menos los problemas que aparecen como consecuencia de la discretización espacial y temporal de las ecuaciones de Maxwell. Se analizarán los problemas que surgen, tales como la estabilidad de la solución, la dispersión numérica, la anisotropía intrínseca del espacio, absorción en el contorno, etc. y las soluciones que se han adoptado. También se describirán otros aspectos relevantes a tener en cuenta como son los diferentes sistemas de antenas considerados, el modelo elegido para simular las fluctuaciones en la densidad del plasma y el método de detección empleado para obtener las magnitudes relevantes de la onda (amplitud y fase) en la antena receptora.

### 3.1. INTRODUCCION AL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Comenzamos la descripción del método de diferencias finitas considerando la ecuación en derivadas parciales más básica que describe la propagación de ondas: la ecuación de ondas escalar unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

La solución general a esta ecuación es  $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$  y representa la superposición de dos ondas que se propagan en la dirección del eje X en sentidos opuestos con una velocidad  $c$ .

Consideremos el desarrollo de Taylor de la función  $u(x,t)$  alrededor de un punto  $x_i$  del espacio y en un instante de tiempo fijo  $t_n$ :

$$u(x_i + \Delta x)\Big|_{t_n} = u\Big|_{x_i, t_n} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{x_i, t_n} \quad (3.2)$$

El último término de esta expresión representa el error que se comete en la aproximación al despreciar los restantes términos del desarrollo. En dicho término,  $x_i$  es un punto del espacio que se encuentra en el intervalo  $(x_i, x_i + \Delta x)$ .

Si hacemos el mismo desarrollo pero en el punto  $x_i - \Delta x$  se obtiene la expresión:

$$u(x_i - \Delta x)\Big|_{t_n} = u\Big|_{x_i, t_n} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{x_i, t_n} \quad (3.3)$$

donde ahora el punto  $x_i$  se encuentra en el intervalo  $(x_i - \Delta x, x_i)$ . Sumando las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$$u(x_i + \Delta x)\Big|_{t_n} + u(x_i - \Delta x)\Big|_{t_n} = 2u\Big|_{x_i, t_n} + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{x_i, t_n} \quad (3.4)$$

donde ahora  $x_i$  se encuentra en el intervalo  $(x_i - \Delta x, x_i + \Delta x)$ .

Si reagrupamos términos en la expresión (3.4) y despejamos la derivada segunda de la magnitud física  $u$  con respecto a la coordenada  $X$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \left[ \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (3.5)$$

donde  $O[(\Delta x)^2]$  es una notación que significa que el error que se comete al despreciar términos de orden superior tiende a cero como el cuadrado del incremento espacial.

La expresión (3.5) se dice que es una aproximación centrada (en el punto  $x_i$ ) a la segunda derivada espacial de la magnitud física  $u$  con respecto a la coordenada  $X$  y que tiene precisión de segundo orden.

Por conveniencia, se adopta la notación  $x_i = i\Delta x$ , donde  $i$  es un número entero, para representar puntos discretos a lo largo del eje  $X$  que se encuentran separados una distancia  $\Delta x$  constante. La discretización temporal se realiza de forma similar  $t_n = n\Delta t$  con  $n$  entero.

Según esta notación, la expresión (3.5) se escribe:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.6)$$

Haciendo lo mismo para la derivada segunda de la magnitud física  $u$  con respecto al tiempo se obtiene:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (3.7)$$

donde  $O[(\Delta t)^2]$  representa el error que se comete al despreciar los órdenes superiores del desarrollo.

Llamaremos ecuación de ondas discreta a la ecuación de ondas que se obtiene al reemplazar sus derivadas temporales y espaciales por sus aproximaciones de Taylor a segundo orden:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (3.8)$$

Despejando para el último instante de tiempo  $t_{n+1}$  se obtiene:

$$u_i^{n+1} = (c\Delta t)^2 \left[ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (3.9)$$

La expresión (3.9) representa una aproximación con precisión de segundo orden para la magnitud física  $u$  en el punto  $x_i = i\Delta x$  y en el instante de tiempo  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ . Una expresión como la (3.9) se dice que es explícita puesto que todas las cantidades del segundo miembro de la ecuación son conocidas ya que han sido calculadas en instantes de tiempo anteriores. Por tanto, empleando esta expresión en todos los puntos del espacio de interés e iterando sucesivamente en el tiempo podemos resolver la ecuación de ondas en cualquier punto del espacio y en cualquier instante de tiempo.

Como veremos posteriormente, la discretización temporal  $\Delta t$  y espacial  $\Delta x$  no puede hacerse de forma arbitraria.

### 3.2. RELACIÓN DE DISPERSIÓN. NUMÉRICA Y REAL

En los fenómenos ondulatorios la relación existente entre el número de onda  $k$  y la frecuencia angular  $\omega$  de la onda  $k = k(\omega)$  se conoce como relación de dispersión. En el caso de una onda plana monocromática de amplitud unitaria y escrita en notación fasorial  $u(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}$ , donde  $j = \sqrt{-1}$ , dicha relación de dispersión viene dada por  $k = \omega/c$ . La velocidad de fase de la onda  $v_f = \omega/k$  cuando se propaga por el vacío es

$v_f = c$ , que es constante, independiente de la frecuencia de la onda y su valor coincide con la velocidad de grupo  $v_g = d\mathbf{w}/dk = c$ . Aquellos medios que hacen que las ondas se propaguen conforme a una relación de dispersión como la anterior, se dice que son no dispersivos. En general, la dispersión se define como la variación del número de onda  $k$  con la frecuencia angular  $\mathbf{w}$  de la onda que se propaga por el medio y se dice que el medio es dispersivo si dicho cambio no es constante para todas las frecuencias.

Tratemos de obtener sus equivalentes desde el punto de vista numérico. Para ello, expresamos la onda en su versión discreta como  $u_i^n = e^{j(\mathbf{w}\Delta t - \tilde{k}i\Delta x)}$ , donde  $\mathbf{w}$  es la frecuencia y  $\tilde{k}$  es el número de onda numérico que, en general, es distinto al número de onda físico  $k$ .

Supongamos que dicho número de onda numérico es una magnitud compleja  $\tilde{k} = \tilde{k}_{real} + j\tilde{k}_{imag}$ . Entonces, la onda numérica puede escribirse como  $u_i^n = e^{\tilde{k}_{imag}\Delta x} e^{j(\mathbf{w}\Delta t - \tilde{k}_{real}i\Delta x)}$ . A partir de esta expresión puede comprenderse el significado de la parte imaginaria del número de onda. Si  $\tilde{k}_{imag} = 0$  la onda tiene una amplitud constante en todo el espacio; si  $\tilde{k}_{imag} > 0$  la onda tiene una amplitud que crece exponencialmente con la distancia y  $\tilde{k}_{imag} < 0$  representa una onda cuya amplitud disminuye exponencialmente con la distancia.

Sustituyendo la expresión discreta de la onda  $u_i^n = e^{j(\mathbf{w}\Delta t - \tilde{k}i\Delta x)}$  en la ecuación de ondas discreta (3.8) se llega tras un poco de álgebra elemental, a la siguiente relación de dispersión numérica:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left( \frac{\Delta x}{c\Delta t} \right)^2 [\cos(\mathbf{w}\Delta t) - 1] \right\} \quad (3.10)$$

donde  $\cos^{-1}$  representa la función inversa de la función coseno.

Puede observarse que debido a la discretización espacial y temporal del problema, existe una relación más complicada entre el número de onda y la frecuencia que en el caso continuo.

Analicemos en función de la discretización espacial y temporal elegida los diferentes casos que se pueden presentar:

1. Discretización “muy fina”  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ .

Bajo esta aproximación:  $\cos(\mathbf{w}\Delta t) \approx 1 - (\mathbf{w}\Delta t)^2/2$  y sustituyendo en la relación de dispersión numérica (3.10):

$$\tilde{k} \cong \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left( \frac{\Delta x}{c\Delta t} \right)^2 \left[ 1 - \frac{(\mathbf{w}\Delta t)^2}{2} - 1 \right] \right\} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{2} (k\Delta x)^2 \right] \quad (3.11)$$

donde  $k = \mathbf{w}/c$ . Tomando el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ , y aplicando el desarrollo en serie de Taylor para la función  $\cos^{-1}$  se llega al resultado buscado:  $\tilde{k} \cong \frac{1}{\Delta x} (k\Delta x) = k$ . Es decir, el número de onda numérico y el real coinciden y, por tanto, la velocidad de fase numérica ( $v_f = \mathbf{w}/\tilde{k}$ ) y de grupo ( $v_g = d\mathbf{w}/d\tilde{k}$ ) se corresponden con sus valores físicos. El resultado es lógico, ya que dice que a medida que los incrementos espaciales y temporales tienden a cero, la solución numérica se aproxima a la exacta.

2. Paso temporal “mágico”  $c\Delta t = \Delta x$

En este caso:  $\tilde{k} = \frac{1}{c\Delta t} \cos^{-1} [1 + \cos(\mathbf{w}\Delta t) - 1] = \frac{\mathbf{w}\Delta t}{c\Delta t} = k$ , es decir, el número de onda numérico es exactamente igual al número de onda del espacio libre en el medio continuo.

El primer caso tiene una limitación práctica referente al tiempo de cálculo ya que, a medida que reducimos la discretización del espacio y del tiempo, son necesarias más iteraciones temporales y espaciales para resolver el problema. El segundo caso

parece bastante atractivo ya que el número de onda numérico coincide exactamente con el real y se puede pensar que es una buena opción para resolver los problemas con mayor precisión. Sin embargo, como se mostrará posteriormente, esta discretización hace que la solución no sea estable.

### 3. Caso dispersivo

En general la dispersión numérica está presente y su efecto depende de la elección realizada a la hora de discretizar el espacio y el tiempo. Si elegimos  $c\Delta t = \Delta x/2$  la relación de dispersión es:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left( \frac{\Delta x}{\Delta x/2} \right)^2 \left[ \cos \left( \frac{\mathbf{w}\Delta x}{2c} \right) - 1 \right] \right\} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[ \cos \left( \frac{k\Delta x}{4} \right) - 1 \right] \right\} \quad (3.12)$$

donde  $k = \mathbf{w}/c = 2\mathbf{p}/\mathbf{l}_0$ . Si tomamos  $\Delta x = \mathbf{l}_0/10$  llegamos a  $\tilde{k} = \frac{0.63642}{\Delta x}$ . La

velocidad de fase numérica ( $v_f = \mathbf{w}/\tilde{k}$ ) es  $v_f = 0.9873c$ . Es decir, un 1.27% inferior que la velocidad de fase correcta.

Si en lugar de tomar  $\Delta x = \mathbf{l}_0/10$  tomamos el doble de puntos por longitud de onda  $\Delta x = \mathbf{l}_0/20$ , la velocidad de fase resultante es  $v_f = 0.9969c$ . Este valor es un 0.31% inferior al valor teórico y cuatro veces inferior que el error obtenido tomando sólo diez puntos por longitud de onda. Esto muestra que el algoritmo empleado tiene precisión de segundo orden puesto que al dividir por dos la discretización, el error numérico se divide por cuatro.

De este estudio, se concluye que la resolución espacial de la malla y la resolución temporal, tienen un efecto directo en la velocidad de fase numérica de la onda. Se suele definir un parámetro adimensional  $S = c\Delta t/\Delta x$ , llamado factor de estabilidad de Courant por motivos que se mencionaran más adelante y otro parámetro  $N_I = \mathbf{l}_0/\Delta x$  que representa la resolución espacial de la malla. Con esta notación, la relación de dispersión queda en la forma:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{S} \right)^2 \left[ \cos \left( \frac{2pS}{N_I} \right) - 1 \right] \right\} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{z} = 1 + \left( \frac{1}{S} \right)^2 \left[ \cos \left( \frac{2pS}{N_I} \right) - 1 \right]$ .

A partir de la relación de dispersión (3.13) puede observarse que es posible escoger unos valores de  $S$  y  $N_I$  tales que el número de onda numérico sea un número complejo, lo que implicaría una modificación de la amplitud de la onda que no se debe a ningún fenómeno físico sino que se debe exclusivamente a la discretización elegida. La transición entre valores reales y complejos del número de onda  $\tilde{k}$  ocurre cuando el número de puntos elegido por longitud de onda es:

$$N_I|_{transición} = 2pS / \cos^{-1}(1 - 2S^2).$$

Para valores de  $N_I$  superiores a este valor crítico, el número de onda numérico es real y por tanto, la amplitud de la onda no se modifica a medida que se propaga por la malla debido a la discretización.

### 3.3. ESTABILIDAD NUMÉRICA

Anteriormente, hemos visto que la elección de unos valores concretos para  $\Delta x$  y  $\Delta t$  determina la velocidad de propagación de las ondas en la malla. Otro punto importante a tener en cuenta es la estabilidad numérica de la solución. Adoptamos la siguiente definición para la estabilidad de una solución: “Una solución numérica explícita de la forma (3.9) es estable si como resultado de las sucesivas iteraciones el resultado que se obtiene es finito para una entrada inicial de datos finita. La solución es inestable si la solución tiende a infinito para una entrada finita”.

Para realizar el estudio de la estabilidad de una solución asumimos una onda sinusoidal de la forma:  $u_i^n = e^{j(\tilde{w}n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x)} = e^{-\tilde{w}_{imag}n\Delta t} e^{j(\tilde{w}_{real}n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x)}$ , donde hemos asumido

que  $\tilde{\omega}$  puede ser una magnitud compleja  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{real} + j\tilde{\omega}_{imag}$ . Repitiendo el proceso anteriormente descrito para llegar a la relación de dispersión pero despejando la frecuencia  $\tilde{\omega}$  en lugar del número de onda  $\tilde{k}$  se tiene:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} \left\{ S^2 [\cos(\tilde{k} \Delta x) - 1] + 1 \right\} = \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{x} = S^2 [\cos(\tilde{k} \Delta x) - 1] + 1$

Es fácil ver que el parámetro  $\mathbf{x}$  se encuentra acotado  $1 - 2S^2 \leq \mathbf{x} \leq 1$  para todos los posibles valores reales de  $\tilde{k}$ . Analicemos lo que ocurre en intervalos diferentes del parámetro  $\mathbf{x}$ :

- a)  $-1 \leq \mathbf{x} \leq 1$ , (si  $0 \leq S \leq 1$ ). Entonces,  $\cos^{-1}(\mathbf{x})$  es un número real y por tanto  $\tilde{\omega}$  es una magnitud real. En estas condiciones, la amplitud de la onda se mantiene constante en el tiempo.
- b)  $1 - 2S^2 \leq \mathbf{x} < -1$ , (si  $S > 1$ ). En este caso, se puede ver que la frecuencia  $\tilde{\omega}$  es un número complejo cuyas partes real e imaginaria son:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{real} &= \mathbf{p} / \Delta t \\ \tilde{\omega}_{imag} &= \frac{1}{\Delta t} \ln \left( -\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Es decir, la expresión para la onda quedaría en la forma:

$$u_i^n = e^{-n \ln \left( -\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} \right)} e^{j[(\mathbf{p}/\Delta t)(n\Delta t) - \tilde{k}i\Delta x]} = \left( -\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} \right)^{-n} e^{j[(\mathbf{p}/\Delta t)(n\Delta t) - \tilde{k}i\Delta x]}$$

Como vemos, en estas condiciones, la amplitud de la onda se multiplica por un número mayor que uno en cada iteración temporal puesto que existe un factor multiplicativo  $\left( -\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} \right)^{-1} = -\mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}$  que es mayor que la unidad ya

que  $\mathbf{x} < -1$ . Es decir, la solución numérica del problema crece de forma exponencial con el tiempo.

Una característica de esta inestabilidad, es que el comportamiento oscilatorio de la solución en la malla depende exclusivamente de la discretización temporal

elegida ya que la frecuencia  $f_0$  de las oscilaciones es  $f_0 = \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{real}}{2\mathbf{p}} = \frac{1}{2\Delta t}$ .

Además, la velocidad de fase de la onda  $v_f = \tilde{\mathbf{w}}_{real} / \tilde{k} = c/S$  depende del factor de estabilidad de Courant.

En resumen, la discretización espacial y temporal para la resolución de la ecuación de ondas unidimensional tiene una cota superior dada por:

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (3.15)$$

Una vez que se ha realizado una introducción al método FDTD empleando como ejemplo la ecuación de ondas escalar unidimensional y se han mostrado diversos fenómenos que ocurren al discretizar el espacio y el tiempo para resolver el problema, pasamos a describir la aplicación del método FDTD a la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

### 3.4. ECUACIONES DE MAXWELL EN EL VACIO. ALGORITMO DE YEE

#### 3.4.1. Ecuaciones de Maxwell

A partir de las ecuaciones del rotacional de Maxwell (2.1-2.2) que se mostraron en el capítulo 2 y suponiendo que la propagación de la onda se produce en el espacio vacío, se pueden obtener fácilmente las expresiones que relacionan las variaciones espaciales de los campos con las variaciones temporales de los mismos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

En ellas se ha hecho uso de la relación lineal existente entre los vectores inducción magnética  $\vec{B}$  y campo magnético  $\vec{H}$  en vacío:  $\vec{B} = \mathbf{m}_0 \vec{H}$ .

El sistema de estas seis ecuaciones en derivadas parciales acopladas constituye el punto de partida de los algoritmos numéricos basados en el método de las diferencias finitas. Por simplicidad, desarrollaremos en primer lugar la solución de las ecuaciones de Maxwell mediante el método FDTD para el espacio libre. Posteriormente veremos la forma de introducir el plasma en el código a partir de la densidad de corriente  $\vec{J}$  en la ecuación (2.2) y de la ecuación de movimiento de los electrones en presencia de un campo electromagnético (2.5).

El algoritmo FDTD emplea directamente las ecuaciones del rotacional de los campos y no necesita imponer explícitamente las ecuaciones que expresan la divergencia nula de los campos en vacío. Esto se consigue estructurando adecuadamente la malla espacial, de tal forma que la divergencia nula de los campos en vacío está implícita. Por tanto, las únicas ecuaciones que se necesitan son las ecuaciones de Maxwell en las que aparece la derivada temporal de los campos.

### 3.4.2. Reducción a 2D

Como ya se ha comentado, para simular las condiciones que se dan en la reflectometría de microondas, es suficiente con resolver las ecuaciones de Maxwell en dos dimensiones. Por ello, suponemos que el medio que estamos modelando es homogéneo en la dirección del eje  $Z$  y que la onda incidente es uniforme en esa dirección. Bajo estas condiciones todas las derivadas espaciales con respecto a la coordenada  $Z$  se anulan en las ecuaciones de Maxwell. Esto supone una simplificación muy significativa de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

### 3.4.3. Modo ordinario y modo extraordinario de propagación

Analizando con detalle el sistema de ecuaciones anterior, puede observarse que es posible agruparlo en un conjunto de dos sistemas de ecuaciones desacoplados. Por un lado, un sistema de ecuaciones en el que aparecen únicamente las componentes  $H_x$ ,  $H_y$  y  $E_z$  y por otro lado, un sistema en el que aparecen exclusivamente las componentes  $E_x$ ,  $E_y$  y  $H_z$ . Cada uno de estos sistemas corresponde, respectivamente, a los modos de propagación ordinario y extraordinario.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Modo Ordinario} \\
 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \right\} (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Modo extraordinario} \\
 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{e}_0} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mathbf{m}_0} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Como también se comentó en el capítulo anterior, los fenómenos físicos asociados a estos dos modos pueden ser diferentes. Esto se debe a la orientación de los campos relativa a la superficie que se está modelando y al campo magnético del medio en el cual se propaga la onda.

### 3.4.4. Algoritmo de Yee

Para resolver el conjunto de ecuaciones (3.16) y (3.17) han ido desarrollándose diversos métodos con el paso de los años, sin embargo, uno de los más empleados en la

actualidad fue el desarrollado por Kane Yee en 1966 [28]. Yee desarrolló un sistema de diferencias finitas que presenta múltiples ventajas:

1. El algoritmo resuelve el campo eléctrico y el campo magnético en el tiempo y en el espacio a partir de las ecuaciones acopladas del rotacional de los campos en lugar de resolver de forma independiente la ecuación de ondas para cada campo.
  - Si se emplea información tanto del campo eléctrico como del campo magnético, la solución es más robusta que si se considera sólo uno de ellos. Además, esto permite modelar tanto las propiedades eléctricas como las magnéticas del material e incorporar simultáneamente ambas en las ecuaciones a resolver.
  - Las condiciones de contorno propias de los campos tales como la condición de campo magnético tangente a superficies conductoras o la condición de campo eléctrico perpendicular a dichas superficies se incorporan de forma sencilla y simultáneamente.
2. El algoritmo de Yee centra las componentes de los campos en un espacio tridimensional de forma que cada componente del campo eléctrico se encuentra rodeada por cuatro componentes del campo magnético y cada componente del campo magnético está, a su vez, rodeada por cuatro componentes de campo eléctrico (ver figura 3.1).

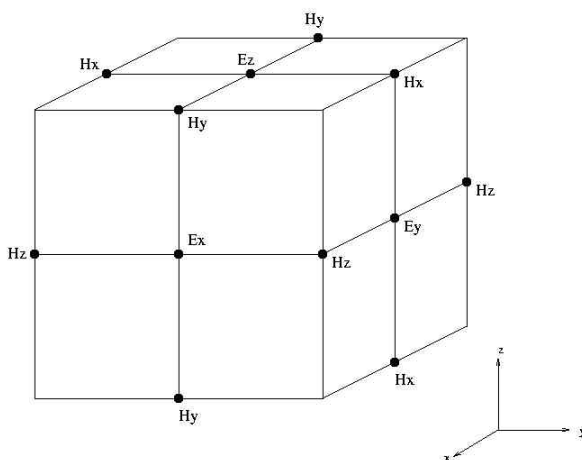


Figura 3.1 Disposición espacial de los campos

Esta disposición espacial rellena el espacio de contornos entrelazados muy útiles a la hora de emplear la Ley de Ampere o la Ley de Faraday. Es decir, es muy sencillo identificar los contornos cerrados de  $H$  asociados al flujo eléctrico a través de la superficie que encierra ese contorno o bien, encontrar los contornos adecuados para calcular el flujo magnético a partir de las componentes de  $E$  que rodean al campo  $H$ .

Además presenta otras ventajas:

- Las expresiones obtenidas con el método FDTD para las derivadas espaciales están centradas en un valor de campo y tienen precisión de segundo orden.
- Las condiciones de contorno de los campos en una superficie conductora se implementan de forma natural si dicha superficie es paralela a uno de los ejes de la malla. En el caso de que esto no ocurra, se puede hacer un modelado sencillo de la misma basado en un modelo “tipo escalera”. De acuerdo con este modelo, la superficie se descompone en un conjunto de superficies paralelas y perpendiculares a los ejes de la malla que se ajusten a la superficie real. La resolución espacial viene fijada por el tamaño de la celda elemental de la malla. Como veremos más adelante, este modelo simple reproduce las propiedades originales del problema.
- Una ventaja fundamental es que con esta disposición de los campos, implícitamente se satisfacen las dos Leyes de Gauss (para  $E$  y  $B$ ). Es decir, la malla diseñada por Yee cumple que su divergencia es nula en ausencia de cargas eléctricas.

3.- El algoritmo de Yee también centra los campos en el tiempo. Con esto queremos decir que todos los valores del campo eléctrico en un instante de tiempo se calculan a partir de los valores del campo magnético calculados en la iteración anterior. El ciclo se cierra recalculando nuevamente el campo magnético a partir del nuevo valor del campo eléctrico. Este ciclo se repite tantas veces como sea necesario.

Esta disposición temporal de los campos también presenta múltiples ventajas:

- Es explícito, todos los valores de los campos para avanzar la solución una iteración temporal han sido calculados previamente.
- Las derivadas temporales están centradas en torno al instante en que se calcula su valor y tienen precisión de segundo orden (error tiende a cero mas rápido que  $(\Delta t)^2$ ).
- El algoritmo no es disipativo, es decir, la amplitud de la onda no tiende a cero debido a fenómenos inducidos por el mismo.

La notación introducida por Yee para la discretización espacial y temporal es:

$$(x, y, z) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

$$t = n\Delta t$$

De tal manera que cualquier componente de los campos en un punto determinado del espacio y en un instante dado de tiempo se expresa mediante:

$$u(x, y, z, t) = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n$$

Con esta notación y siguiendo el desarrollo de Yee, las derivadas temporales y espaciales en las tres direcciones de espacio se expresan mediante:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2, j, k}^n - u_{i-1/2, j, k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i, j+1/2, k}^n - u_{i, j-1/2, k}^n}{\Delta y} + O[(\Delta y)^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i, j, k+1/2}^n - u_{i, j, k-1/2}^n}{\Delta z} + O[(\Delta z)^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i, j, k}^{n+1/2} - u_{i, j, k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]$$

Vemos que las derivadas espaciales están centradas en torno al punto  $(i, j, k)$  y la temporal lo está en el instante  $t = n\Delta t$ .

### 3.5. EFECTOS DE DISPERSIÓN NUMÉRICA Y ESTABILIDAD

#### 3.5.1.- Relación de dispersión numérica en 2D

Consideremos una onda plana y monocromática en su versión discreta:

$$\begin{aligned} E_x(i, j, n) &= E_{xo} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}_x i \Delta x - \tilde{k}_y j \Delta y)} \\ E_y(i, j, n) &= E_{yo} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}_x i \Delta x - \tilde{k}_y j \Delta y)} \\ H_z(i, j, n) &= H_{zo} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}_x i \Delta x - \tilde{k}_y j \Delta y)} \end{aligned}$$

Nuevamente,  $\tilde{k}$  denota el vector de onda numérico y puede ser una magnitud compleja. Sustituyendo estas expresiones en el sistema de ecuaciones correspondiente al modo extraordinario (3.17) y después de simplificar y agrupar términos, se llega a una expresión como la siguiente:

$$\left[ \frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2}\right) \right]^2 \quad (3.18)$$

Esta expresión que relaciona la frecuencia de la onda con el número de onda, por analogía con el caso continuo, recibe el nombre de relación de dispersión numérica en dos dimensiones. La misma ecuación se obtiene para el modo ordinario (3.16).

#### 3.5.2. Comparación con el caso no dispersivo

Como vemos, la discretización tiene un efecto evidente en la velocidad de fase de la onda. Recordemos que en el caso continuo, la frecuencia y el número de onda están relacionados a través de la velocidad de la luz en el medio, es decir:

$$\left(\frac{\mathbf{w}}{c}\right)^2 = (k_x)^2 + (k_y)^2 \quad (3.19)$$

El hecho de que en el caso numérico no exista una relación lineal entre el número de onda y la frecuencia hace que exista una dispersión artificial inducida en la onda como consecuencia de la discretización. Es decir, la velocidad de fase de la onda no es independiente de la longitud de onda. Esto lleva a una distorsión espacial del frente de onda conforme transcurre el tiempo. Sin embargo, al igual que en la ecuación de ondas unidimensional, es fácil ver que en el límite  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ , la relación de dispersión numérica (3.18) se reduce a la real (3.19). Por lo tanto, el efecto de la dispersión se puede reducir aumentando la resolución espacial y temporal del mallado. Sin embargo, como ya se ha comentado, consideraciones de tipo práctico hacen que haya que llegar a un compromiso entre tiempo de cálculo y dispersión introducida.

### 3.5.3. Anisotropía inducida en la velocidad de fase. Simulaciones

Una de las consecuencias de la dispersión numérica es que las ondas numéricas que se propagan por la red tienen una velocidad de propagación que es dependiente de la dirección de propagación [27]. Es decir, la red espacial representa de forma intrínseca un medio anisótropo.

Para mostrar el orden de magnitud del problema consideremos una malla que cumpla  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ . Si escribimos la ecuación (3.18) en términos del factor de estabilidad de Courant ( $S = c\Delta t/\Delta$ ) y de la resolución espacial de la malla ( $N_I = \mathbf{l}_0/\Delta$ ) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{S^2} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{N_I}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta \cdot \tilde{\mathbf{k}} \cos \mathbf{f}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta \cdot \tilde{\mathbf{k}} \sin \mathbf{f}}{2}\right) \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el ángulo formado por la dirección de propagación de la onda y el eje X de la malla.

Las direcciones de propagación que simplifican notablemente esta expresión coinciden con los ejes principales de la malla  $\mathbf{f} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ . En estos casos, la relación de dispersión viene dada por la expresión:

$$\tilde{\mathbf{k}} = \frac{2}{\Delta} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{S} \sin \left( \frac{\mathbf{p} S}{N_I} \right) \right] \quad (3.21)$$

La velocidad de fase numérica ( $\tilde{v}_f = \mathbf{w}/\tilde{\mathbf{k}}$ ) a lo largo de los ejes principales de la malla es:

$$\tilde{v}_f = \frac{\mathbf{p} c}{N_I \sin^{-1} \left[ \frac{1}{S} \sin \left( \frac{\mathbf{p} S}{N_I} \right) \right]} \quad (3.22)$$

y la velocidad de fase a lo largo de las diagonales principales de la malla  $\mathbf{f} = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  es:

$$\tilde{v}_f = \frac{\mathbf{p} c}{N_I \sqrt{2} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{S\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\mathbf{p} S}{N_I} \right) \right]} \quad (3.23)$$

Si suponemos unos parámetros típicos para el factor de Courant  $S = 0.5$ , y una densidad de puntos en la malla  $N_I = 20$ , obtenemos para la velocidad de fase los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_f &= 0.996892 c && \text{ejes principales} \\ \tilde{v}_f &= 0.998968 c && \text{diagonales} \end{aligned}$$

Dos consecuencias son inmediatas:

- Ambas velocidades son inferiores a  $c$ . Por lo que la onda numérica viaja en la malla a una velocidad inferior a la real.

- Además, sus respectivos valores son diferentes. Esto significa que una onda que se propaga a lo largo de una diagonal de la malla tiene una velocidad ligeramente superior que aquella que se propaga a lo largo de los ejes principales. Como puede verse a partir de los valores obtenidos para  $\tilde{v}_f$ , la anisotropía en la velocidad es del orden del 0.2 %.

Para ángulos de propagación intermedios la velocidad de fase  $\tilde{v}_f$  se encuentra entre los valores anteriormente mencionados.

Para mostrar este efecto, en la figura 3.2 se representa la distribución espacial del campo magnético asociado a una onda sinusoidal de frecuencia 50 GHz en la iteración temporal  $n = 400$ . El frente de onda es cilíndrico y la onda se propaga en una malla de tamaño  $600 \times 600$  (puntos de malla), con parámetros  $\Delta x = \Delta y = 0.3 \text{ mm}$  y  $\Delta t = 0.5 \text{ ps}$ . La onda se genera en el centro de la malla aplicando una excitación sinusoidal a la componente  $B_z$  del campo magnético. La curva correspondiente a  $90^\circ$  representa la distribución espacial del campo a lo largo del eje vertical de la malla que pasa por el punto donde se genera la onda y la correspondiente a  $45^\circ$  representa la distribución espacial a lo largo de la diagonal a la malla. El factor de estabilidad de Courant es  $S = 0.5$  y la resolución espacial de la malla es  $N_f = 20$ .

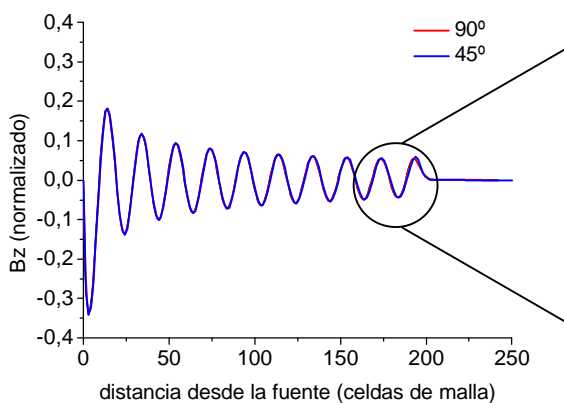


Figura 3.2 Distribución espacial del campo magnético en la iteración  $n = 400$

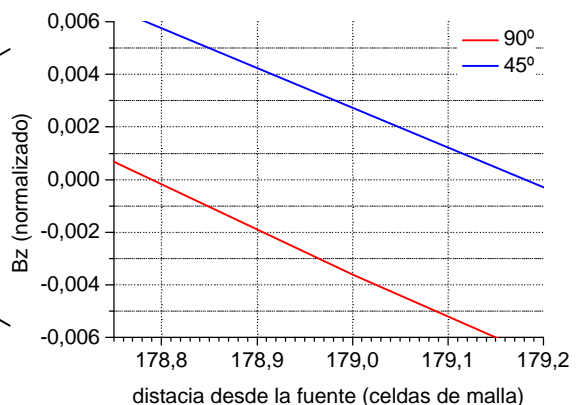


Figura 3.3 Ampliación de la Figura 3.2

Debido a la simetría del problema, la distribución espacial del campo magnético a lo largo del eje horizontal es la misma que la que existe en el eje vertical. Del mismo modo, la distribución espacial a lo largo de las diagonales de la malla es la misma.

La figura 3.3 es una ampliación de la figura 3.2 y en ella se puede observar que la propagación de la onda a lo largo de la diagonal principal es más rápida que a lo largo del eje vertical. A partir de la figura 3.3 es posible estimar el porcentaje de anisotropía si comparamos la distancia recorrida por la onda en cada una de las dos direcciones durante las 400 iteraciones temporales. El porcentaje de anisotropía es  $\frac{179.1750 - 178.7875}{178.9812} \times 100 = 0.22 \%$ , que está en claro acuerdo con las predicciones teóricas.

Además, si se mira con detalle la figura 3.2 puede observarse que existe un valor de campo no nulo a distancias mayores que 200 puntos de malla desde la fuente. Esto no debería suceder puesto que el número de iteraciones es 400 y estamos tomando  $S = 0.5$ . Este efecto se debe a que determinadas componentes de alta frecuencia se propagan por la malla con velocidades de fase superiores a  $c$ . El origen de estas componentes se encuentra en la forma de generar el campo electromagnético. Si se desea evitar la aparición de estas componentes de alta frecuencia en la onda emitida, la amplitud de la misma debe incrementarse suavemente desde un valor inicial nulo hasta su valor final. En la figura 3.4 puede observarse más claramente el efecto que provoca una generación muy rápida de la onda. En ella se muestra la amplitud del campo magnético  $B_z$  en la iteración número  $n = 400$  que se obtiene cuando se aplica una función escalón al campo magnético  $B_z$  de la onda en el instante  $n = 0$ . Es decir, la amplitud de la onda pasa de un valor nulo hasta su valor final en una sola iteración temporal. Como consecuencia del cambio abrupto en la amplitud, la onda que se genera no es monocromática y presenta un contenido espectral ancho. La malla es idéntica a la empleada en los casos mostrados en las figuras 3.2 y 3.3.

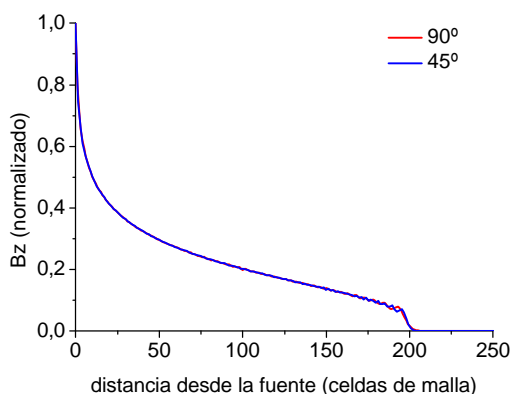


Figura 3.4 Amplitud del campo magnético en la iteración  $n = 400$

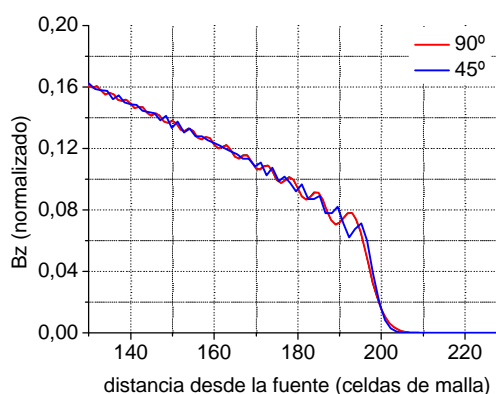


Figura 3.5 Ampliación de la Figura 3.4

Nuevamente las curvas correspondientes a  $0^\circ$  y a  $90^\circ$  se encuentran superpuestas debido a la simetría del problema. Lo mismo ocurre con las dos diagonales de la malla.

La figura 3.5 es una ampliación de la figura 3.4 y en ella pueden observarse claramente tres efectos:

- Existe un valor de campo magnético no nulo en puntos que distan más de 200 puntos de malla desde el foco emisor. La onda sólo debería propagarse hasta una distancia igual a 200 puntos de malla puesto que  $S = 0.5$ . Sin embargo, hemos mostrado anteriormente que la velocidad de fase de cada componente en frecuencia de la onda puede variar dependiendo de la discretización tomada. Este fenómeno se debe a las componentes de alta frecuencia de la onda que no se encuentran suficientemente bien resueltas por el mallado espacial. Es decir, cuando la frecuencia es alta (pequeña longitud de onda) el número de puntos de malla por longitud de onda que se ha considerado no es suficiente.
- Se puede ver un comportamiento oscilatorio que no es real. Esto se debe a las componentes de más baja frecuencia que viajan con velocidades de fase diferentes e inferiores a  $c$ .

- El comportamiento oscilatorio a lo largo de los ejes principales de la malla es diferente al existente a lo largo de la diagonal principal. Esto se debe al efecto ya mencionado de la anisotropía artificial inducida en la malla.

Este ejemplo muestra la importancia de generar adecuadamente el campo electromagnético si se quiere simular la propagación de una onda monocromática. Una generación demasiado rápida del campo electromagnético incluiría componentes de frecuencia en la onda incidente no deseadas. Por este motivo, la amplitud de la onda en el código se incrementa lentamente durante varios períodos de la onda (al menos durante 10 períodos para la frecuencia más baja considerada), hasta alcanzar su valor final. Transcurrido ese tiempo la amplitud de la onda permanece constante. Para ello se usa una función suave con derivada nula en el origen  $n=0$  y que crece hasta un valor prácticamente constante tras un cierto número de iteraciones temporales. La función que se ha empleado en las simulaciones es  $\frac{A}{2}[1 + \tanh((n-400)/100)]$ , donde  $A$  es la amplitud de la onda incidente y  $n$  es el número de la iteración temporal. La figura 3.6 muestra la forma en la que se establece la amplitud de la onda en el caso particular de tomar  $A=1$ .

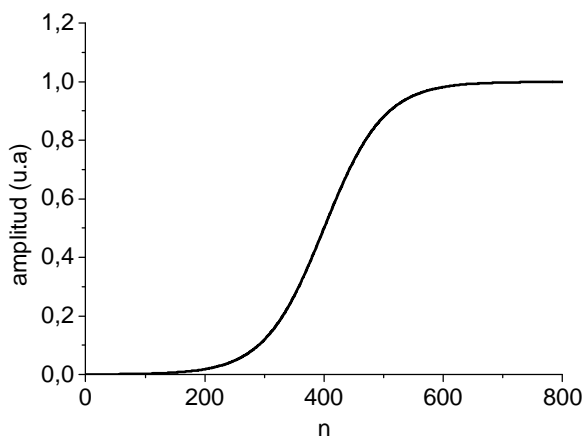


Figura 3.6. Crecimiento de la amplitud de la onda en función del número de iteración temporal  $n$

#### 3.5.4. Estabilidad numérica

Con el fin de asegurar estabilidad numérica en el código, la discretización temporal no puede ser arbitraria sino que debe mantenerse por debajo de una cierta cota superior que depende del número de dimensiones espaciales que consideremos.

El método empleado en el estudio de la estabilidad numérica se basa en el análisis de la relación de dispersión numérica anteriormente deducida y repetida aquí por conveniencia:

$$\left[ \frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\mathbf{w}\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\mathbf{k}}_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\mathbf{k}}_y \Delta y}{2}\right) \right]^2 \quad (3.24)$$

Si resolvemos la ecuación para la frecuencia  $\mathbf{w}$  tenemos:

$$\mathbf{w} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{x} = c \Delta t \sqrt{\left[ \frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{\mathbf{k}}_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{\mathbf{k}}_y \Delta y}{2}\right) \right]^2}$

Evidentemente, para que la ecuación anterior tenga solución real se tiene que cumplir que  $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ . Sin embargo, vemos que  $\mathbf{x}$  está acotado por los valores:

$$0 \leq \mathbf{x} \leq c \Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2} = \mathbf{x}_{\max} \quad (3.26)$$

Está claro que una elección desafortunada de la discretización espacial y temporal puede llevar a un valor  $\mathbf{x} > 1$ . Bajo estas circunstancias la frecuencia adquiere un valor imaginario que origina un crecimiento exponencial de la solución. La estabilidad de la solución depende del valor del parámetro  $\mathbf{x}$  y existe un rango de valores en los que la solución es estable y otro rango en el que la solución es inestable:

- Rango estable:  $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$
- Rango inestable:  $1 < \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}$  (existe si  $\mathbf{x}_{\max} > 1$ )

Por lo tanto, fijada la discretización espacial, el rango inestable aparece si:

$$\Delta t > \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2}} = \Delta t_{\text{limite}}$$

En el caso particular de una malla con  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ , este rango existirá si:

$$\Delta t > \frac{\Delta}{c\sqrt{2}} = \Delta t_{\text{limite 2D}}$$

Es decir, el factor de estabilidad de Courant tiene una cota superior que garantiza la estabilidad del código:

$$S_{\text{limite 2D}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.27)$$

Por este motivo, los códigos 2D suelen emplear un valor ligeramente inferior al valor límite  $S = 0.5 < S_{\text{limite 2D}}$ .

En el código hemos considerado una discretización con  $S = 0.5$  y el número de puntos por longitud de onda es  $N_l \geq 20$ , donde la igualdad ocurre para una frecuencia incidente de 50 GHz. Esta elección nos permite realizar simulaciones con una frecuencia máxima de la onda incidente de 50 GHz manteniendo, como hemos visto, unos niveles aceptables de anisotropía y dispersión numérica.

## 3.6. CONDICIONES DE CONTORNO

### 3.6.1. Introducción

Desde el trabajo inicial de Yee, la técnica FDTD ha sido ampliamente utilizada para la resolución de problemas electromagnéticos. Sin embargo, uno de los principales problemas recae en el hecho de que las ecuaciones de Maxwell deben resolverse en un espacio discretizado cuyo tamaño tiene que ser finito. Con lo cual, aquellos problemas que involucren propagación sin ningún tipo de frontera requieren un tratamiento

especial. Se han desarrollado varias técnicas con el fin de simular esta “propagación sin frontera” [29-33]. Entre ellas, la técnica PML (Perfectly Matched Layer) [33] se ha convertido en una herramienta ampliamente utilizada para este propósito. El nombre hace referencia a su principal cualidad: independientemente del ángulo bajo el cual incida la onda y de su frecuencia, la capa PML, cuyo espesor suele ser de unas pocas celdas de malla, es capaz de absorber más del 99.9% de la radiación incidente en la misma, simulando de este modo una propagación sin fronteras.

### 3.6.2. Técnica PML

#### 3.6.2.1. Aplicación al modo extraordinario

Como ya hemos visto, en la propagación en modo extraordinario, el campo electromagnético tiene sólo tres componentes y las ecuaciones de Maxwell se reducen a un sistema de tres ecuaciones. Si consideramos que el medio en el que se propaga la onda presenta una cierta conductividad eléctrica  $\mathbf{s}$  y una cierta conductividad magnética  $\mathbf{s}^*$  este conjunto de ecuaciones es:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{s} E_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{s} E_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mathbf{m}_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \mathbf{s}^* H_z &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} (3.28)$$

Además, sabemos que si se cumple la condición  $\mathbf{s}/\mathbf{e}_0 = \mathbf{s}^*/\mathbf{m}_0$ , la impedancia del medio en cuestión es igual a la impedancia del espacio libre y por lo tanto no existe reflexión cuando una onda plana que se propaga por el vacío incide perpendicularmente en este medio.

El objetivo es obtener un medio capaz de absorber la radiación independientemente del ángulo de incidencia y de la frecuencia de la onda. Para ello, Berenger [33] definió un medio PML como aquel medio caracterizado por cuatro

parámetros  $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$  en el que las ecuaciones de Maxwell para el modo extraordinario toman la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{s}_y E_x &= \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{s}_x E_y &= -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \\ \mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x^* H_{zx} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y^* H_{zy} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} (3.29)$$

El punto clave de esta definición consiste en la separación del campo  $H_z$  en dos componentes  $H_{zx}$  y  $H_{zy}$ .

Este conjunto de ecuaciones incluye como casos particulares todos los medios usuales.

- Si  $\mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^*$  el sistema se reduce a un sistema de ecuaciones que involucran  $E_x$ ,  $E_y$  y  $H_z = H_{zx} + H_{zy}$ .
- Si  $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y = \mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^* = 0$ , el sistema se reduce a las ecuaciones de Maxwell en el vacío.
- Si  $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y$  y  $\mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^* = 0$ , se reduce a las ecuaciones de un medio conductor.
- Si  $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y$  y  $\mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^*$ , se reduce a las ecuaciones de un medio absorbente.

Consideremos una serie de casos particulares de especial interés:

1. Si  $\mathbf{s}_y = \mathbf{s}_y^* = 0$ , el medio PML puede absorber una onda plana  $(E_y, H_{zx})$  que se propaga en la dirección X, pero no absorbe una onda plana  $(E_x, H_{zy})$  que se propaga según Y.

2. Si  $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_x^* = 0$ , el medio PML puede absorber una onda plana  $(E_x, H_{zy})$  que se propaga en la dirección Y, pero no absorbe una onda plana  $(E_y, H_{zx})$  que se propaga según X.

Veamos ahora la forma en la que una onda plana se propaga en un medio PML.

Supongamos una onda plana de frecuencia  $\omega$  cuyo campo eléctrico forma un ángulo  $\mathbf{j}$  con el eje Y.

$$\begin{aligned} E_x &= -E_0 \sin \mathbf{j} \cdot e^{i\omega(t-ax-by)} \\ E_y &= E_0 \cos \mathbf{j} \cdot e^{i\omega(t-ax-by)} \\ H_{zx} &= H_{zx0} e^{i\omega(t-ax-by)} \\ H_{zy} &= H_{zy0} e^{i\omega(t-ax-by)} \end{aligned}$$

Los parámetros  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  representan unas constantes de propagación de la onda cuyos valores se determinan introduciendo estas ecuaciones en el sistema de ecuaciones que definen el medio PML (3.29).

Haciendo esto se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} H_{zx0} &= E_0 \sqrt{\mathbf{e}_0 / \mathbf{m}_0} \frac{1}{G} \mathbf{w}_x \cos^2 \mathbf{j} \\ H_{zy0} &= E_0 \sqrt{\mathbf{e}_0 / \mathbf{m}_0} \frac{1}{G} \mathbf{w}_y \sin^2 \mathbf{j} \\ H_0 &= E_0 \sqrt{\mathbf{e}_0 / \mathbf{m}_0} G \\ Z_{medio} &= \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\mathbf{m}_0 / \mathbf{e}_0} \frac{1}{G} \end{aligned} \quad \begin{aligned} G &= \sqrt{\mathbf{w}_x \cos^2 \mathbf{j} + \mathbf{w}_y \sin^2 \mathbf{j}} \\ \mathbf{w}_x &= \frac{1 - i(\mathbf{s}_x / (\mathbf{e}_0 \omega))}{1 - i(\mathbf{s}_x^* / (\mathbf{m}_0 \omega))} \\ \mathbf{w}_y &= \frac{1 - i(\mathbf{s}_y / (\mathbf{e}_0 \omega))}{1 - i(\mathbf{s}_y^* / (\mathbf{m}_0 \omega))} \\ \mathbf{a} &= \frac{\sqrt{\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0}}{G} \left( 1 - i \frac{\mathbf{s}_x}{\mathbf{e}_0 \omega} \right) \cos \mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= \frac{\sqrt{\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0}}{G} \left( 1 - i \frac{\mathbf{s}_y}{\mathbf{e}_0 \omega} \right) \sin \mathbf{j} \end{aligned}$$

donde  $Z_{medio}$  representa la impedancia característica del medio PML.

En las expresiones anteriores una simplificación muy importante ocurre cuando:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x / \mathbf{e}_0 &= \mathbf{s}_x^* / \mathbf{m}_0 \\ & \text{y} \\ \mathbf{s}_y / \mathbf{e}_0 &= \mathbf{s}_y^* / \mathbf{m}_0 \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones  $w_x = w_y = G = 1$  independientemente de la frecuencia de la onda incidente. Si llamamos  $\Psi$  a cualquier componente de los campos y  $\Psi_0$  a su magnitud, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 e^{i\omega(t - (x \cos \mathbf{j} + y \sin \mathbf{j}) / c)} \cdot e^{-(\mathbf{s}_x \cos \mathbf{j} / \mathbf{e}_0 c)x} \cdot e^{-(\mathbf{s}_y \sin \mathbf{j} / \mathbf{e}_0 c)y} \\ Z_{medio} &= \sqrt{\mathbf{m}_0 / \mathbf{e}_0} \end{aligned} \right\} (3.30)$$

Tres conclusiones se pueden sacar a partir de las expresiones anteriores:

1. La primera exponencial nos dice que la fase de la onda se propaga perpendicularmente al campo eléctrico con velocidad igual a  $c$ .
2. Las últimas exponenciales muestran que la amplitud de la onda decrece exponencialmente según se propaga a lo largo de los ejes X e Y.
3. La impedancia característica del medio coincide con la del espacio libre. Por lo tanto, una onda plana que incide perpendicularmente se transmite idealmente sin reflexión independientemente de la frecuencia, atenuándose progresivamente.

Un análisis más detallado sobre la propagación de ondas en medios PML puede encontrarse en el trabajo de Berenger [33]. Sin embargo, resumimos aquí algunas de sus conclusiones más relevantes relativas a la transmisión y reflexión de ondas planas en la superficie de separación de dos medios PML.

El coeficiente de reflexión de una onda plana entre dos medios PML cuyas conductividades satisfacen la relación  $\mathbf{s} / \mathbf{e}_0 = \mathbf{s}^* / \mathbf{m}_0$  es nulo para cualquier frecuencia y es independiente del ángulo de incidencia en:

- Una superficie perpendicular al eje X si se cumple la condición dada por:  
 $\mathbf{s}_y(\text{medio2}) = \mathbf{s}_y(\text{medio1})$  y  $\mathbf{s}_y^*(\text{medio2}) = \mathbf{s}_y^*(\text{medio1})$

- Una superficie perpendicular al eje Y si se cumple la condición dada por:  
 $\mathbf{s}_x(\text{medio2}) = \mathbf{s}_x(\text{medio1})$  y  $\mathbf{s}_x^*(\text{medio2}) = \mathbf{s}_x^*(\text{medio1})$

Teniendo en cuenta que el vacío es un medio PML con parámetros (0,0,0,0) cada uno de los casos anteriores lleva a la base de la técnica PML.

- El coeficiente de reflexión es nulo en una superficie perpendicular al eje X, que separa el vacío (0,0,0,0) de un medio PML de parámetros  $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, 0, 0)$ .
- El coeficiente de reflexión es nulo en una superficie perpendicular al eje Y que separa el vacío (0,0,0,0) de un medio PML de parámetros  $(0, 0, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$ .
- El coeficiente de reflexión es nulo en la superficie de separación entre dos medios que tengan  $(0, 0, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$  y  $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$
- El coeficiente de reflexión es nulo en la superficie de separación entre dos medios que tengan  $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, 0, 0)$  y  $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$

De todo lo anterior, se deduce que la elección que se muestra en la figura 3.7 es capaz de absorber las ondas independientemente del ángulo bajo el cual incidan.

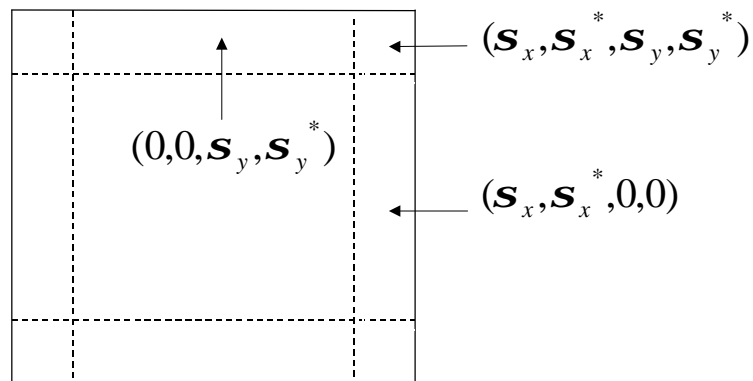


Figura 3.7 Contorno empleado en la técnica PML

Si la onda se atenúa suficientemente conforme se propaga a través del medio PML, se puede rodear el contorno PML con un conductor perfecto, limitando de esta manera el contorno computacional. En principio, el coeficiente de reflexión en el medio PML puede reducirse tanto como sea necesario ampliando el espesor de la capa PML. Por ejemplo, la intensidad de las ondas reflejadas en el contorno se puede reducir en

más de un 99.9% empleando un medio PML con un espesor equivalente a ocho celdas de malla.

Para el modo ordinario, las componentes involucradas de los campos son  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ . En este caso, la componente que se desglosa en dos subcomponentes es  $E_z$ . Los mismos cálculos pueden realizarse llegando a pequeñas modificaciones en las ecuaciones. Sin embargo, todas las propiedades antes mencionadas, referentes a la absorción de la radiación incidente sobre el medio PML siguen siendo válidas.

### 3.6.2.2.- Simulaciones

Para ver la capacidad de absorción de la capa PML, las figuras 3.8 y 3.9 muestran, respectivamente, los contornos de campo magnético cuando se implementa la absorción en el contorno mediante un medio PML con un espesor de 8 puntos de malla y cuando se rodea el contorno con un conductor perfecto.

En la figura 3.8 puede verse claramente que la onda se propaga a través del medio PML sin que exista reflexión apreciable. En la figura 3.9 puede verse la reflexión de la onda en el conductor perfecto que rodea a la malla y la interferencia entre la onda incidente y la onda reflejada. La onda se genera en el centro de la malla y su frecuencia es 40 GHz.

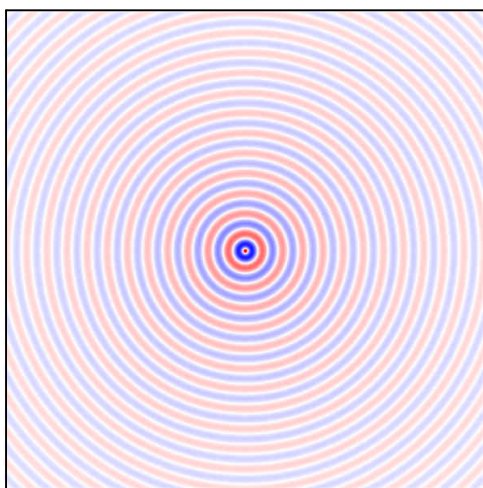


Figura 3.8. Contorno de campo magnético empleando un medio PML con un espesor de 8 puntos de malla. El tamaño de la malla es 600 x 600 (puntos de malla) y la frecuencia de la onda incidente es 40 GHz.

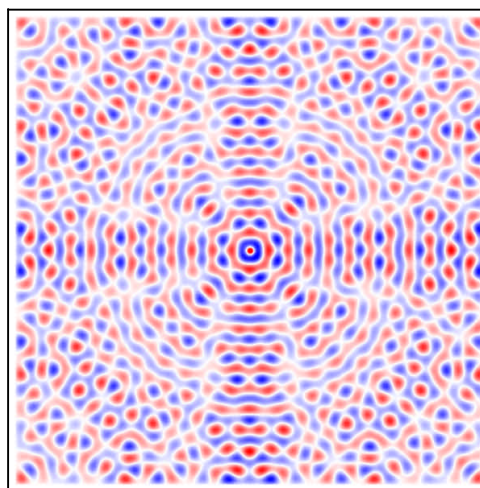


Figura 3.9 Contorno de campo magnético cuando la malla se rodea por un conductor perfecto. El tamaño de la malla es 600 x 600 (puntos de malla) y la frecuencia de la onda incidente es 40 GHz.

### 3.7. INTRODUCCIÓN DEL PLASMA EN EL CÓDIGO

El plasma se puede suponer que es un medio que puede conducir corrientes pero que por lo demás está gobernado por las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Es decir, todas las propiedades del plasma están incluidas en las ecuaciones de Maxwell en la respuesta de la densidad de corriente  $\vec{J}$  al campo electromagnético de la onda y al campo magnético del dispositivo. Para calcular dicha respuesta, necesitamos resolver la ecuación de movimiento de los electrones en presencia de un campo electromagnético. Como sabemos, dicha dinámica viene dada por la ley de Lorentz:

$$-e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.31)$$

El campo magnético  $\vec{B}$  tiene dos contribuciones: el campo magnético de la onda  $\vec{B}_{onda}$  y el campo magnético del dispositivo experimental  $\vec{B}_0$ . En los dispositivos de fusión el campo magnético externo es muy intenso (varios Teslas) y se cumple que:  $B_{onda} \ll B_0$ ; por lo tanto podemos despreciar el campo magnético de la onda frente al del dispositivo. Dado que estamos resolviendo la propagación en modo extraordinario, el campo eléctrico de la onda está en el plano XY y el magnético a lo largo del eje Z paralelo al campo magnético del dispositivo.

En estas condiciones, la dinámica de los electrones en el plano XY viene dada por:

$$\left. \begin{aligned} -e(E_x + B_0 v_y) &= m_e \frac{dv_x}{dt} \\ -e(E_x - B_0 v_x) &= m_e \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= -en_e v_x \\ J_y &= -en_e v_y \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

siendo  $n_e$  la densidad electrónica del plasma, las ecuaciones (3.32) pueden escribirse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= \mathbf{e}_0 \mathbf{w}_{pe}^2 E_x - \Omega J_y \\ \frac{dJ_y}{dt} &= \mathbf{e}_0 \mathbf{w}_{pe}^2 E_y + \Omega J_x \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

donde  $\mathbf{w}_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\mathbf{e}_0 m_e}}$  es la frecuencia de plasma para los electrones y  $\Omega = \frac{eB_0}{m_e}$  es la frecuencia ciclotrónica electrónica.

El conjunto de ecuaciones (3.17) y (3.34) constituye un conjunto completo de ecuaciones.

Para resolver las ecuaciones de los campos, se usa la técnica FDTD descrita anteriormente. Sin embargo, para garantizar la estabilidad del código cuando se considera el plasma, las ecuaciones de corriente (3.34) deben ser resueltas empleando un tratamiento especial. Dichas ecuaciones se resuelven mediante un método de Runge-Kutta de cuarto orden.

El proceso iterativo es el siguiente:

En el instante  $t_n$  se calculan las dos componentes de corriente  $J_x, J_y$  por el método de Runge-Kutta y el campo magnético  $B_z$  de la onda por el método FDTD en toda la malla. Para ello se emplean los valores del campo eléctrico que ya han sido obtenidos previamente en el instante  $t_{n-1/2}$ . A partir de estos nuevos valores para  $J_x, J_y$  y  $B_z$  se obtienen las dos componentes del campo eléctrico  $E_x$  y  $E_y$  en el instante de tiempo  $t_{n+1/2}$ . El ciclo se cierra calculando nuevamente el valor de  $J_x, J_y$  y  $B_z$  en el instante  $t_{n+1}$  a partir del campo eléctrico calculado en el instante  $t_{n+1/2}$ . El proceso continúa tantas veces como sea necesario. Inicialmente todas las corrientes y campos son nulos. La forma en la que se genera el campo electromagnético depende del tipo de

antena que se vaya a utilizar para lanzar la onda al plasma. En la siguiente sección se analizan los dos tipos de antenas empleados en las simulaciones y la forma de generar el campo en cada caso.

Con el fin de estudiar el efecto que las fluctuaciones de densidad tiene sobre las señales de reflectometría consideramos que la densidad del plasma se puede expresar como:

$$n_e(x, y, t) = \langle n_e(x, y) \rangle + \mathbf{d}n_e(x, y, t) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{d}n_e(x, y, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} a(k_x, k_y) \sin[k_x x + k_y (y - v_p t) + \mathbf{j}_{random}(k_x, k_y, t)] \quad (3.36)$$

El primer término de la ecuación (3.35) representa el perfil promedio de densidad y por tanto no depende del tiempo y el segundo término representa las fluctuaciones de densidad. El espectro de números de onda de las fluctuaciones está definido mediante los coeficientes  $a(k_x, k_y)$  en la expresión (3.36). Estos coeficientes se multiplican por un factor constante para tener un valor cuadrático medio de la turbulencia igual al que queremos simular. El espectro en números de onda se ajusta por medio de una función gaussiana de la forma  $\exp(-(k_x^2 + k_y^2)/k_w^2)$  donde  $k_w$  es la anchura espectral. El número total de modos que se utiliza tiene un fuerte impacto en el tiempo de cálculo. Por tanto, dicho número es un compromiso entre cómo de realista es la turbulencia simulada y el tiempo de cálculo. El número total de modos considerados en las simulaciones es cuatro modos radiales y doce poloidales que se encuentran equiespaciados conforme a las siguientes expresiones:  $k_x(i) = i \cdot k_w/4$  y  $k_y(j) = j \cdot k_w/12$  con  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, \dots, 12$ . El término aleatorio de fase  $\mathbf{j}_{random}(k_x, k_y, t)$  en la expresión (3.36) se introduce para romper la periodicidad en la evolución temporal de la densidad. El término  $v_p$  representa la velocidad a la que las fluctuaciones se propagan en la dirección del eje Y. Tenemos así dos escalas de tiempo muy diferentes. Por un lado, tenemos la velocidad de propagación de la luz en vacío ( $c \cong 300000$  km/s) y por otro lado la velocidad de propagación de las fluctuaciones de densidad que de acuerdo con los valores experimentales es del orden de unos pocos km/s. Esto hace que la onda en su viaje de ida y vuelta vea esencialmente un plasma

“congelado” sin variaciones temporales de densidad. Debido al tremendo coste computacional de un simple trayecto de ida y vuelta de la onda y a la gran diferencia entre la velocidad de propagación de las fluctuaciones de densidad y la velocidad de propagación de la onda, es necesario acelerar la velocidad de propagación de las fluctuaciones. Tal y como se demuestra [34], dicha velocidad se puede incrementar hasta un valor igual a  $c/20$  sin que ello afecte, salvo un factor de escala, a los resultados que se obtienen. En nuestras simulaciones hemos escogido este valor para la velocidad de propagación de las fluctuaciones.

### 3.8. GUIAS DE ONDA Y ANTENAS

Para realizar los estudios que se presentan en esta memoria se han considerado dos tipos de haces de microondas con propiedades muy diferentes. Por un lado, se emplea el haz emitido utilizando una antena estándar tipo piramidal. Este tipo de haz se caracteriza por una divergencia del frente de onda muy alta. Por otro lado, se emplean haces gaussianos cuya divergencia del frente de onda es mucho menor.

#### 3.8.1. Antenas estándar

Para lanzar la onda al plasma se emplea una guía de ondas rectangular que alimenta a una antena estándar de microondas. La guía de ondas está orientada a lo largo del eje X de la malla y la antena está unida a ella al final de la misma. Las paredes metálicas de la guía de ondas se simulan como conductores perfectos, imponiendo que el campo eléctrico de la onda sea perpendicular a la superficie conductora. Es decir, anulando la componente X del campo eléctrico en la superficie conductora ( $E_x|_{\text{conductor}} = 0$ ). La superficie de la antena se reemplaza por un conjunto de superficies paralelas y perpendiculares a los ejes de la malla que reproducen bastante bien la forma real de la superficie de la antena. La aproximación es tanto mejor cuanto menor sea el tamaño  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  de la celda elemental de la malla. En cada sección horizontal o vertical de la antena se aplica la condición de contorno correspondiente:  $E_x|_{\text{conductor}} = 0$  si la pared es horizontal o bien  $E_y|_{\text{conductor}} = 0$  si la pared es vertical. La figura (3.10) resume

las condiciones de contorno aplicadas tanto en la guía de ondas como en la antena y muestra el “modelo en escalera” empleado para simular las paredes inclinadas de la antena. El ángulo de apertura de la antena y su longitud se pueden elegir libremente.

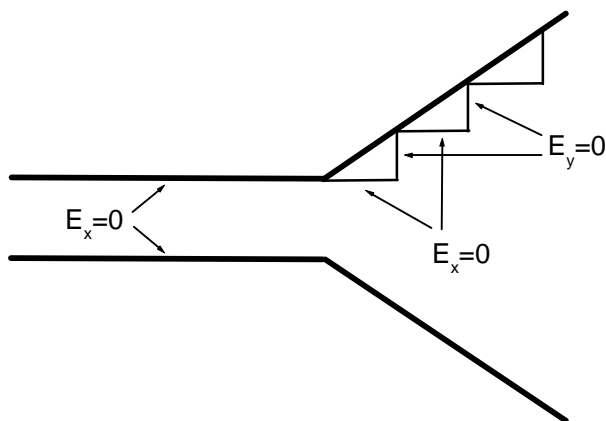


Figura 3.10. Modelo en escalera para simular una antena piramidal de microondas y condiciones de contorno aplicadas en cada superficie del conductor

Para poder simular ondas cuya incidencia no sea normal a las superficies de densidad constante, sino oblicua, es necesario poder modificar la inclinación de las antenas. Para hacer esto, se mantiene la orientación original de la guía de ondas y se inclina cada una de las paredes de la antena el ángulo deseado manteniendo el ángulo total de apertura de la antena constante. Esta forma sencilla de inclinar las antenas, mantiene bastante bien sus propiedades de radiación. La figura 3.11a muestra el diagrama de radiación que se obtiene a una distancia de 15 cm de la antena para dos ángulos de inclinación diferentes ( $0^\circ$  y  $30^\circ$ ). Como puede observarse, ambos diagramas son muy parecidos. La anchura del lóbulo principal es similar en ambos casos y también lo es la separación angular entre los lóbulos secundarios y el principal. Los niveles relativos de potencia de los lóbulos secundarios con respecto al principal también son similares.

### ***Generación del campo electromagnético empleando una antena estándar***

La forma más sencilla de generar el campo electromagnético en la malla consiste en asignar una determinada función temporal a la componente  $B_z$  del campo magnético

en un punto  $(x_0, y_0)$  situado en el centro de la guía de ondas que alimenta a la antena emisora. Dicha dependencia temporal es  $B_z(x_0, y_0, t) = B_0 \sin(2\pi f_0 t)$ , donde  $B_0$  es la amplitud del campo en el punto  $(x_0, y_0)$  y  $f_0$  es la frecuencia de la onda. Además, como ya se ha comentado la amplitud del campo  $B_0$  tiene la forma mostrada en la figura 3.6. Para que se genere el modo de propagación correctamente, la guía de ondas emisora tiene que tener una longitud suficientemente grande comparada con la longitud de onda. En las simulaciones que se han realizado con plasma dicha longitud es superior a 5 cm. Este método de generación del campo electromagnético se conoce con el nombre de “fuente dura” y su nombre viene del hecho de que el valor del campo  $B_z$  en un punto del espacio viene impuesto externamente y es independiente de cualquier otra onda que pudiese alcanzar dicho punto.

Esta forma tan sencilla de generar el campo electromagnético no está exenta de problemas. El principal problema aparece cuando una onda proveniente de cualquier otro punto de la malla incide sobre la fuente. Esto es una situación habitual, puesto que el plasma, eventualmente reflejará parte de la onda proveniente de la fuente y parte de esa energía alcanzará nuevamente el foco emisor. Dado que la fuente es “dura”, el valor del campo en ese punto no se ve afectado por la onda incidente, lo cual provoca una retro-reflexión de la onda incidente que no es real. Este efecto es mucho más apreciable en los modelos 1D, puesto que en ellos toda la energía del campo viaja en una dirección y por lo tanto la cantidad de energía reflejada en esa dirección es mucho mayor que en los modelos 2D ó 3D, en los cuales debido a la propagación de la energía en un espacio más amplio, la cantidad de energía que alcanza nuevamente a la fuente es considerablemente inferior. En aquellos problemas que sean intrínsecamente pulsados, este método puede ser una buena opción para generar el campo. La fuente dura existe únicamente durante la generación del pulso y luego es eliminada permitiendo una propagación en espacio libre. Sin embargo, muchas simulaciones precisan trabajar en régimen continuo de iluminación. Para este tipo de simulación se necesita reducir esa retro-reflexión de la onda en la fuente. Esto se consigue sin más que aplicar el principio de superposición en la fuente, es decir, el campo total en la misma es la suma del campo emitido más cualquier otro campo que alcance a la fuente. Las figuras 3.11b y 3.11c muestran el contorno de campo magnético asociado a la onda electromagnética que se genera mediante este método en el interior de una guía de ondas cuya longitud es 12 cm

aproximadamente y que alimenta una antena estándar de tipo piramidal con dos inclinaciones diferentes:  $0^\circ$  en la figura 3.11b y  $30^\circ$  en la figura 3.11c. Puede observarse que no hay ninguna diferencia significativa en los contornos excepto un giro de  $30^\circ$ .

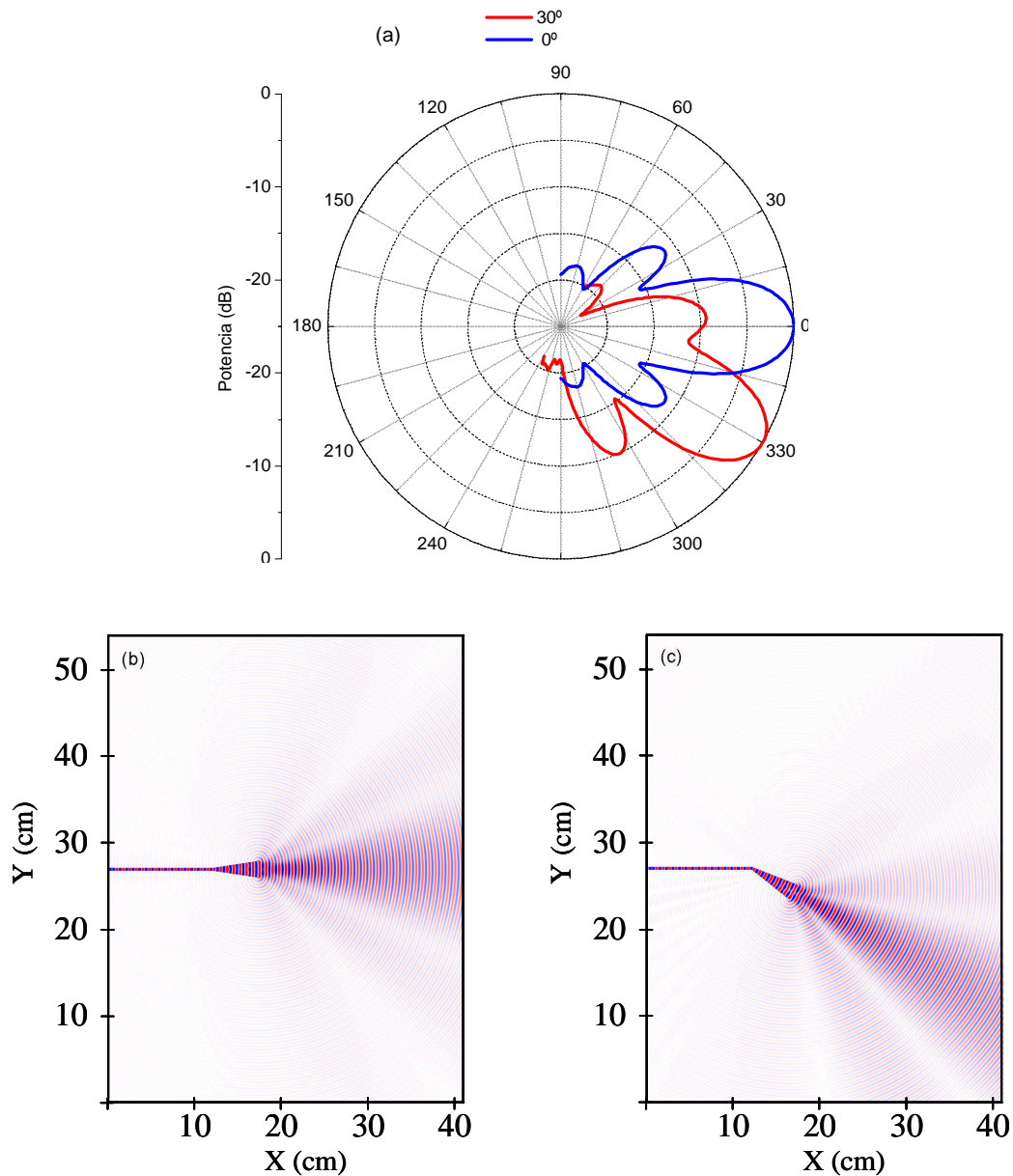


Figura 3.11. (a) Diagrama de radiación de una antena estándar de microondas con una anchura de  $3\text{dB}$  de  $20^\circ$  y longitud de onda  $\lambda_0 = 0.75$  cm para dos ángulos de inclinación  $q = 0^\circ$  y  $q = 30^\circ$ . (b) Contorno del campo magnético para  $q = 0^\circ$  (c) Contorno del campo magnético para  $q = 30^\circ$

### 3.8.2. Haces gaussianos

Un haz gaussiano que se propaga a lo largo del eje X tiene una distribución espacial de su amplitud que viene dada por:

$$E(r, x) = E_0 \frac{w_0}{w(x)} \exp\left[-r^2/w^2(x)\right] \exp\left\{-i\left[kx - \Phi(x) + kr^2/2R(x)\right]\right\}$$

donde  $x$  es la coordenada a lo largo de la propagación del haz y  $r$  es la distancia al eje de propagación en las otras dos coordenadas del espacio ( $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ).

La figura 3.12 muestra el significado físico de cada uno de los términos que aparecen en la expresión anterior.

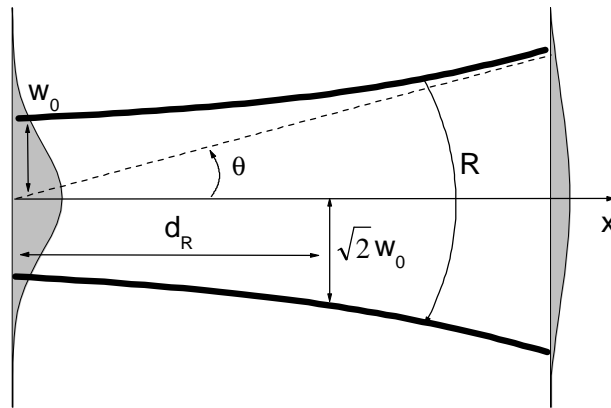


Figura 3.12. Parámetros típicos de un haz gaussiano con una anchura de haz  $w_0$ . El radio de curvatura del frente de onda es  $R$  y la distancia de Rayleigh es  $d_R$

El parámetro  $E_0$  representa la amplitud máxima de la onda en el plano  $x = 0$ . El parámetro  $w_0$  se conoce con el nombre de cintura del haz y representa la anchura del haz gaussiano en el plano  $x = 0$ . En la posición donde se encuentra la cintura de haz, el haz tiene su anchura mínima y un frente de onda plano. El parámetro  $w(x) = w_0 \sqrt{1 + (x/d_R)^2}$  es la anchura del haz a una distancia  $x$  de la posición de la cintura de haz,  $R(x) = x + d_R^2/x$  es el radio de curvatura del frente de ondas a esa distancia,  $\Phi(x) = \tan^{-1}(x/d_R)$  es un término de fase y  $d_R = \mathbf{p}w_0^2/\mathbf{l}$  se conoce con el

nombre de distancia de Rayleigh. La propiedad más interesante de los haces gaussianos es que dentro de la zona de Rayleigh y cerca de la posición de la cintura del haz el frente de onda es prácticamente plano.

La forma más sencilla de simular un haz gaussiano consiste en imponer el valor del campo electromagnético en un plano emisor. La expresión que se ha considerado para la generación de un haz gaussiano en dos dimensiones que se propaga con un cierto ángulo  $q_0$  con respecto al eje X es:

$$B_z(x_0, y, t) = B_{z0} \exp(-y^2/w_0^2) \exp\left(-i\left(\frac{2p}{I_0} y \sin q_0 - 2pf_0 t\right)\right)$$

En esta expresión  $B_{z0}$  es la máxima amplitud del campo y tiene la forma mostrada en la figura 3.6,  $w_0$  es la cintura del haz,  $f_0$  y  $I_0$  son, respectivamente, la frecuencia y la longitud de onda en el vacío.

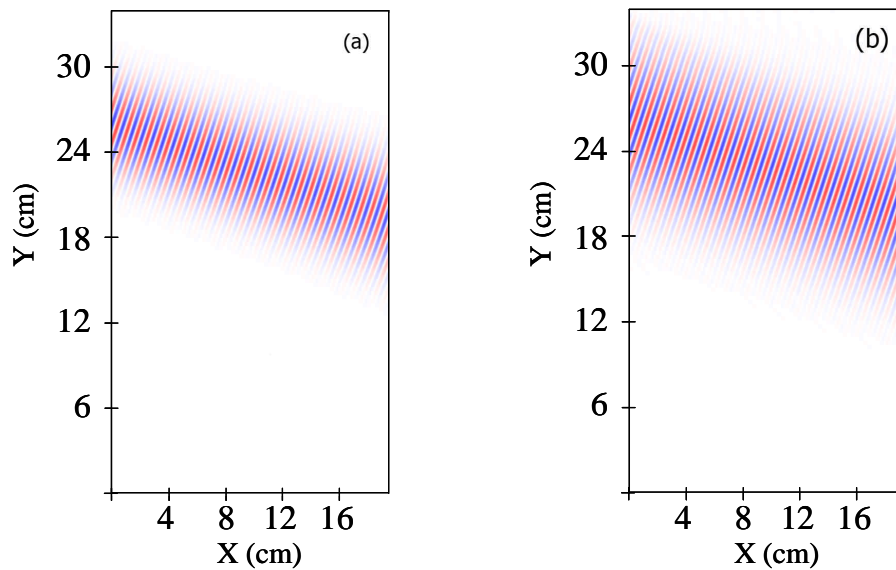


Figura 3.13. Contorno de campo magnético para dos haces gaussianos con una anchura de haz (a)  $w_0 = 3$  cm y (b)  $w_0 = 4.8$  cm. El ángulo de inclinación es  $18^\circ$  y la longitud de onda es  $I_0 = 0.75$  cm

La figura 3.13 muestra los contornos del campo magnético de un haz gaussiano con un ángulo de inclinación de  $18^\circ$  con respecto al eje X y dos tamaños de cintura del haz en el plano emisor ( $X=0$ ) diferentes. En la figura 3.13a la cintura del haz es 3 cm, mientras que en la figura 3.13b su valor es 4.8 cm. En ambas figuras se puede observar que en las proximidades del plano emisor, los frentes de onda son muy planos y que a medida que nos vamos separando de la posición de la cintura de haz el frente de onda se va curvando. Dicha curvatura depende de la distancia de Rayleigh y de la distancia a la posición de la cintura del haz.

### 3.9. DETECCIÓN DE LA SEÑAL

Como se ha comentado, la amplitud y la fase de la señal reflejada en el plasma contienen información referente a la densidad del plasma y sus fluctuaciones. Para extraer dicha información, la amplitud  $A(t)$  y fase  $\mathbf{f}(t)$  de la onda en la antena receptora se obtienen simulando un sistema de detección heterodino. La señal reflejada en el plasma  $A(t)\sin[\mathbf{w}_0t + \mathbf{f}(t)]$  se mezcla con un oscilador local de frecuencia  $\mathbf{w}_0$  obteniéndose las siguientes señales:

$$I = A(t)\sin[\mathbf{w}_0t + \mathbf{f}(t)]\sin(\mathbf{w}_0t) = \frac{A(t)}{2}(\cos(\mathbf{f}(t)) - \cos(2\mathbf{w}_0t + \mathbf{f}(t)))$$

$$Q = A(t)\sin[\mathbf{w}_0t + \mathbf{f}(t)]\cos(\mathbf{w}_0t) = \frac{A(t)}{2}(\sin(\mathbf{f}(t)) + \cos(2\mathbf{w}_0t + \mathbf{f}(t)))$$

Las señales  $I$  y  $Q$  son filtradas empleando un filtro pasa-bajo para eliminar la componente de alta frecuencia  $\mathbf{w}_0$  resultando las señales:

$$\tilde{I} = \frac{A(t)}{2}\cos(\mathbf{f}(t))$$

$$\tilde{Q} = \frac{A(t)}{2}\sin(\mathbf{f}(t))$$

Finalmente, la amplitud y fase se obtienen a partir de estas señales mediante las siguientes expresiones:

$$A(t) = 2\sqrt{\tilde{I}^2 + \tilde{Q}^2}$$

$$\tan \mathbf{f}(t) = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{I}}$$

## CAPÍTULO 4

### ASIMETRÍA NATURAL EN MODO X

#### 4.1. INTRODUCCIÓN

El código de onda completa descrito anteriormente se ha empleado para estudiar una asimetría que surge de forma natural en las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas en modo extraordinario en plasmas magnetizados [35]. El fenómeno al que nos estamos refiriendo es el siguiente: existe una asimetría en la propagación de ondas en modo X al invertir el ángulo de incidencia de la onda o el sentido del campo magnético del dispositivo, en situaciones que aparentemente son simétricas. Nos referimos al caso más sencillo de una onda plana polarizada en modo extraordinario, que incide con un cierto ángulo  $\mathbf{q}_0$  con respecto a la normal al plasma. Las ecuaciones que describen la propagación de la onda predicen la existencia de diferencias en la distribución espacial del campo electromagnético bajo inversión del signo del ángulo de incidencia o del campo magnético del dispositivo. En el caso de la reflectometría Doppler este fenómeno es de particular interés puesto que, como vimos en el capítulo 2, la existencia de una inclinación deliberada de las antenas con respecto a la normal al plasma permite determinar la velocidad de rotación perpendicular de las fluctuaciones de densidad en el plasma. Sin embargo, hasta la fecha no se ha realizado ningún estudio sobre el efecto que la asimetría tiene en las medidas de reflectometría y, en particular, en las medidas que se realizan empleando la técnica de la reflectometría Doppler. Tratar de cuantificar en qué medida y en qué circunstancias la asimetría influye en las medidas Doppler que se realizan en las máquinas de fusión es el objetivo del presente capítulo. En la primera parte se sientan las bases teóricas sobre el origen de tal asimetría. Se repiten las ecuaciones que describen la propagación de la onda en modo extraordinario y se muestran los términos que provocan la asimetría. Posteriormente, se emplea el código de onda completa para estudiar el efecto de la asimetría en dos tipos de plasmas. En primer lugar, se consideran plasmas generados en dispositivos pequeños de laboratorio cuyos valores de densidad, temperatura y campo magnético son considerablemente inferiores a sus correspondientes valores en máquinas

de fusión. Después, se consideran plasmas como los generados en los dispositivos tipo tokamak o stellarator y se estudia el efecto de la asimetría en las medidas Doppler.

## 4.2. BASES TEÓRICAS DEL ORIGEN DE LA ASIMETRÍA

Para estudiar la asimetría partimos de las ecuaciones que rigen la propagación de una onda polarizada en modo extraordinario que incide con un ángulo  $\mathbf{q}_0$  con respecto a la normal a las superficies de densidad constante. Por conveniencia repetimos aquí las ecuaciones más relevantes. La ecuación que describe la distribución espacial de la componente  $E_y$  del campo eléctrico en un plasma plano (sin variación en la dirección Y) que presenta un gradiente en la densidad en la dirección del eje X es [7]:

$$\frac{d^2 E_y}{ds^2} + p(s) \frac{dE_y}{ds} + q(s) E_y = 0, \quad s = k_0 x \quad (4.1)$$

con

$$p(s) = \frac{d}{ds} (\mathbf{w}_{pe}^2) \frac{\sin^2 \mathbf{q}_0}{(\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2) \left( \cos^2 \mathbf{q}_0 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2}{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{ce}^2} \right)} \quad (4.2)$$

y

$$q(s) = 1 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2}{\mathbf{w}^2} \frac{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{pe}^2}{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2} - \sin^2 \mathbf{q}_0 - \frac{d}{ds} (\mathbf{w}_{pe}^2) \frac{\mathbf{w}_{ce}}{\mathbf{w}} \frac{\sin \mathbf{q}_0 \cos^2 \mathbf{q}_0}{(\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{uh}^2) \left( \cos^2 \mathbf{q}_0 - \frac{\mathbf{w}_{pe}^2}{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_{ce}^2} \right)} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{w}$  es la frecuencia de la onda,  $\mathbf{w}_{pe}$  es la frecuencia de plasma para los electrones,  $\mathbf{w}_{ce}$  es la frecuencia ciclotrónica electrónica,  $\mathbf{w}_{uh}$  es la frecuencia híbrida superior,  $x$  es la coordenada a lo largo del gradiente de densidad,  $s$  es proporcional a la coordenada  $x$  normalizada con la longitud de onda en vacío, y  $k_0$  es el número de onda en vacío de la onda incidente.

Los dos términos primeros en el miembro derecho de la expresión (4.3) representan la constante dieléctrica del medio para incidencia normal en un plasma

inhomogéneo, el tercer término tiene en cuenta la modificación debida al ángulo de inclinación  $\mathbf{q}_0$ . Además, en presencia de un gradiente de densidad y un ángulo de incidencia no nulo, se ha de incluir el último término en la expresión (4.3) y el término con  $p(s) dE_y/ds$  en la ecuación (4.1).

Si observamos el último término de la expresión (4.3), podemos ver que contiene una asimetría con respecto a los siguientes parámetros:

1. Ángulo de incidencia ( $\mathbf{q}_0 \leftrightarrow -\mathbf{q}_0$ )

Como podemos observar, dicho término es proporcional a  $\sin \mathbf{q}_0$  y un cambio en el signo del ángulo de incidencia, es decir, una onda propagándose con un ángulo  $-\mathbf{q}_0$  con respecto al eje X, da como resultado un valor diferente de  $q(s)$  del que se tiene cuando la propagación ocurre bajo un ángulo  $\mathbf{q}_0$ .

2. Campo magnético del dispositivo ( $B_0 \leftrightarrow -B_0$ )

Del mismo modo, una inversión en el sentido del campo magnético del dispositivo ocasionará el mismo fenómeno puesto que el último término es proporcional a  $\mathbf{w}_{ce}$  que, a su vez, es proporcional al campo magnético.

Es decir, la función  $q(s)$  y, por tanto, la ecuación que describe la propagación de la onda, no es igual bajo cambios de signo en el ángulo de incidencia o inversión del campo magnético del dispositivo, lo cual resulta llamativo dada la aparente simetría del problema. Por lo tanto, es esperable algún efecto visible en la propagación de la onda en su recorrido por el plasma. Es importante resaltar que la asimetría se debe a la presencia de un gradiente de densidad ( $d\mathbf{w}_{pe}^2/ds \neq 0$ ) en el plasma y a la incidencia oblicua de la onda ( $\mathbf{q}_0 \neq 0$ ). Es decir, idealmente en un reflectómetro estándar con incidencia normal que emita una onda cuyo frente de onda sea plano la asimetría no existe (si el plasma es plano). Sin embargo, en un experimento real el frente de onda tiene cierta divergencia y el campo asociado a la onda puede expresarse como una superposición de ondas planas que se propagan con ángulos de propagación diferentes. En estos casos, el término que genera la asimetría podría ser importante.

Por otro lado, la mayor o menor contribución de la asimetría a la solución de la ecuación (4.1) dependerá de la magnitud del último término de la expresión (4.3) comparada con la del resto de los términos. Es decir, la asimetría dependerá del perfil de densidad del plasma ( $w_{pe}^2$ ) y de su gradiente ( $dw_{pe}^2/ds$ ), del campo magnético del dispositivo ( $w_{ce}$ ) y del ángulo de incidencia de la onda.

Veamos a continuación una consecuencia inmediata de la asimetría. Siguiendo el desarrollo que aparece en [7], expresamos la componente  $E_y$  del campo eléctrico mediante:

$$E_y(s) = U(s)h(s) \quad (4.4)$$

donde  $h(s) = \exp\left(-\int_{-\infty}^s \frac{1}{2} p(s') ds'\right)$  con  $p(s)$  dado por la ecuación (4.2) y la función

$U(s)$  satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + k^2(s)U(s) = 0 \quad (4.5)$$

$$k^2(s) = q(s) - \frac{1}{2} \frac{dp(s)}{ds} - \frac{1}{4} p^2(s) \quad (4.6)$$

Por analogía entre la ecuación (4.5) y la ecuación (2.9), la constante  $k^2(s)$  se llama constante efectiva de propagación y, por tanto, la velocidad de fase de la onda en la dirección del eje X así como la posición de corte ( $k^2(s) = 0$ ) dependen de la polaridad del campo magnético del dispositivo y del signo del ángulo de incidencia  $q_0$ . Se ha comprobado que invertir el campo magnético es equivalente a cambiar el signo del ángulo de incidencia, lo cual resulta evidente a la vista de la ecuación (4.3).

El estudio se realiza para un plasma como el generado en el dispositivo lineal VINETA [36] situado en Greifswald (Alemania) y para un plasma generado en el stellarator TJ-II [37]. Las simulaciones se han realizado considerando perfiles radiales

de densidad electrónica que se ajustan a los perfiles radiales medidos experimentalmente en cada uno de los dispositivos. En lo que respecta a la asimetría, la principal diferencia entre ellos se encuentra en el valor del campo magnético del dispositivo; en el stellarator TJ-II es más elevado que en la máquina lineal VINETA. Como veremos, esto provoca que en el caso VINETA una fracción pequeña de la potencia incidente en el plasma alcance la posición radial donde se encuentra la resonancia híbrida superior. La separación radial entre la posición de corte y la posición de la resonancia es pequeña y la onda puede alcanzar la resonancia por efecto túnel. Si esto es así, el último término en la ecuación (4.3) debería ser importante puesto que  $w \approx w_{uh}$  y la asimetría debería observarse claramente. En el stellarator TJ-II la separación radial entre la posición de la capa de corte y la posición de la resonancia híbrida superior es lo suficientemente grande como para despreciar el efecto túnel de la onda. Cabe, por tanto, preguntarse si algún efecto debido a la asimetría aparece en las señales de reflectometría. En concreto, en las señales obtenidas con un reflectómetro Doppler. En primer lugar mostramos los resultados que se han obtenido para un plasma pequeño de laboratorio.

#### 4.2.1. Caso VINETA

Para realizar el siguiente estudio, se han considerado unos parámetros típicos de los plasmas que se generan en el dispositivo lineal VINETA. El perfil radial de densidad electrónica tiene una forma que se puede aproximar por una función gaussiana y la densidad del plasma puede alcanzar unos valores próximos a  $n_e = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . La característica más relevante de este dispositivo en el estudio del efecto de la asimetría en las medidas experimentales es el valor del campo magnético del dispositivo. Su valor en toda la columna de plasma es  $B_0 \leq 0.1 \text{ T}$ . Esto significa que en este dispositivo el campo magnético es diez veces inferior al campo magnético del stellarator TJ-II ( $B_0 \approx 1 \text{ T}$ ) y, como veremos a continuación, este valor tan pequeño hace posible que la onda alcance la zona de resonancia en el plasma. Las simulaciones se realizan considerando unos parámetros similares a los del reflectómetro en modo X que se encuentra instalado en dicho dispositivo. La frecuencia de la onda incidente es 24 GHz, y el campo magnético lo suponemos constante e igual a  $B_0 = 0.1 \text{ T}$ . Es decir, la frecuencia ciclotrónica

electrónica normalizada a la frecuencia de la onda incidente tiene un valor  $w_{ce}/w \approx 0.1$ . Con los parámetros que se han considerado y suponiendo incidencia perpendicular a la columna de plasma, la frecuencia de corte bajo  $w_{corte} = 0.5[-w_{ce} + (w_{ce}^2 + 4w_{pe}^2)^{1/2}]$  y la resonancia híbrida superior  $w_{uh} = (w_{pe}^2 + w_{ce}^2)^{1/2} \approx w_{pe}$  se encuentran muy próximas radialmente. Desde el punto de vista matemático, esto significa que el denominador en el último término de la expresión (4.3) es muy pequeño y dicho término puede modificar apreciablemente el valor de  $q(s)$ . Consideramos que un haz gaussiano con una cintura de haz  $w_0/I_0 \approx 2$  incide perpendicularmente en la columna de plasma cuyo radio de curvatura es 2 cm en la capa de corte. La posición de la cintura de haz se encuentra a una distancia de 4 cm de la capa de corte. La asimetría puede ocurrir tanto por la curvatura de la capa de corte del plasma como por la divergencia finita del haz. Es decir, como consecuencia de estos dos factores el ángulo de incidencia de la onda no tiene un único valor sino que varía en un amplio rango de valores distribuidos simétricamente en torno al valor  $q_0 = 0$ .

La figura 4.1 muestra la distribución espacial del valor cuadrático medio de la componente  $E_y$  del campo eléctrico de la onda para un campo magnético positivo. El haz gaussiano se emite desde la parte inferior de la gráfica y el centro de la columna de plasma se encuentra en el origen de coordenadas.

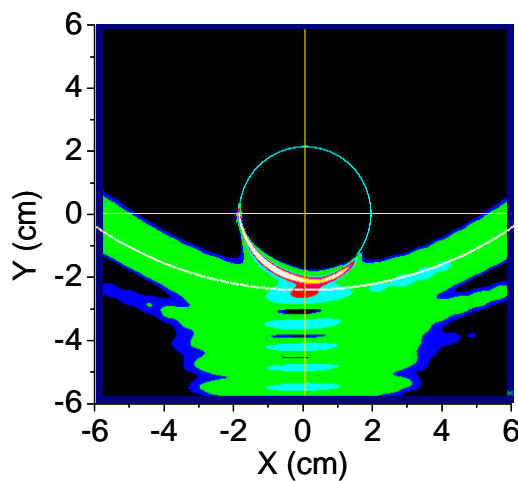


Figura 4.1. Valor cuadrático medio de la componente  $E_y$  del campo eléctrico para  $B_0 > 0$

En la figura, la circunferencia de radio 2 cm representa la capa de corte para modo ordinario en incidencia normal. La región de corte para modo X se encuentra delante de esta capa a una distancia muy pequeña y corresponde a la circunferencia de radio mayor y color blanco. La posición radial del corte depende del valor local del ángulo de incidencia de la onda con respecto al gradiente de densidad. Si el ángulo de incidencia se incrementa, entonces la posición de la capa de corte se desplaza radialmente hacia valores menores de densidad. La región de resonancia se encuentra muy próxima a la posición de corte para el modo ordinario puesto que  $w_{uh} \approx w_{pe}$  (recordemos que en modo O la posición de corte viene determinada por la condición  $w = w_{pe}$ ). Esto significa que, la zona que se observa en la gráfica a lo largo de la circunferencia de radio 2 cm donde la amplitud de la componente  $E_y$  del campo eléctrico es más intensa, corresponde a la posición de la resonancia. Es decir, una fracción pequeña de la potencia incidente se propaga a través de la capa de corte y, por efecto túnel, alcanza la posición de la resonancia. Sin embargo, en la figura puede observarse que, aunque la iluminación es simétrica en torno al eje  $X=0$ , la distribución espacial del campo muestra una fuerte asimetría en torno a este eje.

La figura 4.2 muestra los mismos resultados pero para un campo magnético negativo.

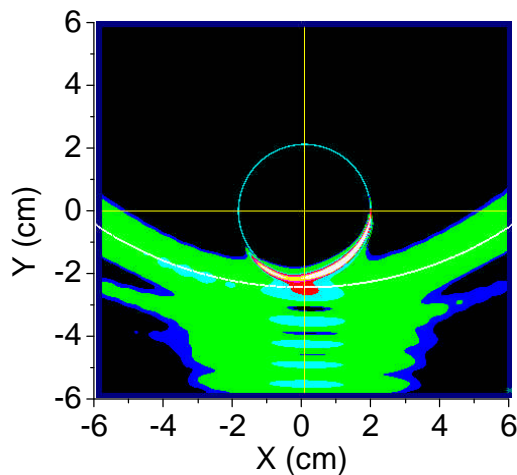


Figura 4.2. Valor cuadrático medio de la componente  $E_y$  del campo eléctrico para  $B_0 < 0$

Como puede observarse, al cambiar el sentido del campo magnético del dispositivo la asimetría se ha invertido.

Los efectos de asimetría se manifiestan claramente en los dos casos en una región del plasma donde el valor de la frecuencia de la onda es similar al valor de la frecuencia híbrida. Sin embargo, la fracción de potencia que alcanza la resonancia es pequeña y, por tanto, la fracción de potencia absorbida en la misma no representa un problema para el correcto funcionamiento del reflectómetro. Cerca de la resonancia se ha introducido en las ecuaciones un término disipativo para simular la absorción de las microondas.

En la figura 4.3 el valor de campo magnético es  $B_0 = 0$  T. Como puede observarse, la distribución espacial del campo es simétrica en todas las zonas, tal y como cabía esperar.

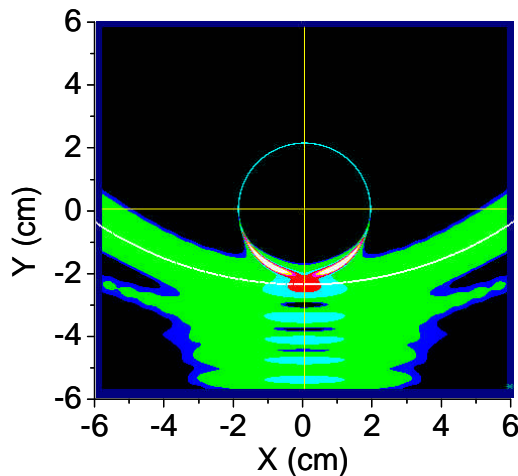


Figura 4.3. Valor cuadrático medio de la componente  $E_y$  del campo eléctrico para  $B_0 = 0$

#### 4.2.2. Caso TJ-II

Una vez que hemos visto los resultados de la sección anterior cabe preguntarse si en plasmas con parámetros distintos, será apreciable algún efecto de la asimetría en las medidas experimentales.

Las simulaciones se han realizado considerando los parámetros de los plasmas de TJ-II, para una onda incidente de frecuencia igual a 40 GHz ( $I_0 = 0.75$  cm). El

campo magnético del dispositivo se toma constante e igual a  $\vec{B}_0 = \pm 1 \vec{u}_z$  (Tesla). Por tanto, la frecuencia ciclotrónica electrónica normalizada con la frecuencia de la onda incidente tiene un valor constante e igual a  $\omega_{ce}/\omega = 0.7$ .

La figura 4.4 muestra el perfil radial de densidad electrónica que se ha considerado en este caso. La línea punteada muestra la posición radial de la capa de corte nominal para incidencia normal y la línea discontinua muestra la posición de la resonancia híbrida superior. Puede observarse que la separación radial entre ambas regiones es 1.2 cm; esta separación es mayor que una longitud de onda en vacío de la onda incidente y, por tanto, no es esperable que la onda alcance la posición de la resonancia.

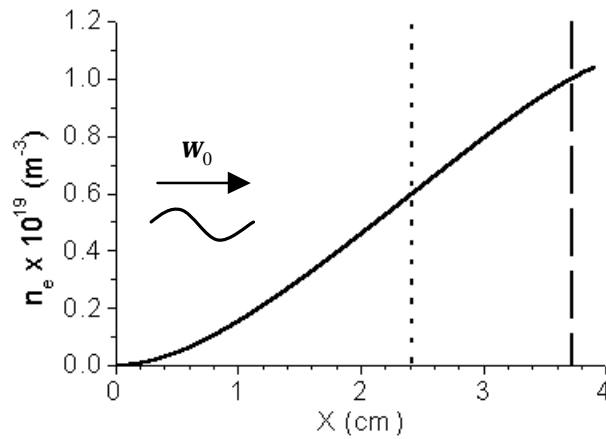


Figura 4.4. Perfil radial de densidad en el plano ecuatorial de TJ-II. Sólo se muestra la parte externa del plasma. Las líneas verticales indican la posición radial del corte en incidencia normal (línea punteada) y la posición de la resonancia híbrida superior (línea discontinua). La onda de frecuencia angular  $\omega_0$  incide desde la zona izquierda de la gráfica.

En primer lugar consideramos un plasma cuyas superficies de densidad constante son planas. Para reducir el efecto de la curvatura del frente de onda y tener un ángulo de incidencia bien definido consideramos un haz gaussiano con una cintura de haz relativamente grande  $w_0/I_0 \approx 6.7$ . La posición de la cintura del haz se encuentra a una distancia de 9 cm de la posición de la capa de corte mientras que la distancia de Rayleigh es notablemente superior (105 cm). Esto garantiza que el radio de curvatura del haz  $R_{beam}$  en la capa de corte sea muy grande y pueda considerarse plano. El haz se propaga con un ángulo de inclinación  $\theta_0 = 30^\circ$  con respecto a la perpendicular al

plasma. Este valor relativamente grande del ángulo de inclinación debería hacer más apreciables los efectos de la asimetría (ver expresión 4.3).

La figura 4.5 muestra la constante efectiva de propagación  $k^2(x)$  dada por la expresión (4.6) para valores positivos y negativos del campo magnético  $\vec{B}_0 = \pm 1 \vec{u}_z$  (T). En ella puede observarse que existe una zona radial del plasma donde  $k^2(s) > 0$  (zona de propagación); existe una posición radial donde  $k^2(s) = 0$  (posición radial de la capa de corte) y existe una zona en la que  $k^2(s) < 0$  (zona evanescente) donde la onda se atenúa conforme se propaga por el plasma. La existencia de estas tres regiones ya se comentó en el capítulo dedicado a los fundamentos de la reflectometría.

Lo más llamativo de la figura 4.5 es el efecto que provoca la inversión del campo magnético en la posición radial de la capa de corte. Puede observarse que dicha inversión ocasiona un desplazamiento radial de la capa de corte de aproximadamente 2 mm. Además, puede observarse que en el borde del plasma la constante de propagación tiene un valor igual a 0.75 aproximadamente. Como se muestra en [7] la constante de propagación  $k^2(s)$  tiende al valor  $\cos^2 \mathbf{q}_0$  en el borde del plasma. En nuestro caso,  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$  y  $\cos^2 \mathbf{q}_0 = 0.75$ .

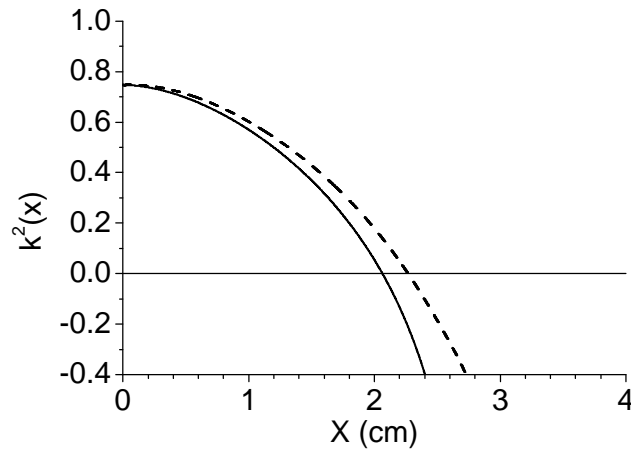


Figura 4.5. Constante de propagación efectiva  $k^2(x)$  obtenida para el perfil radial mostrado en la figura 4.4. La posición de la capa de corte se encuentra a una distancia del borde del plasma igual a 2.07 cm cuando  $B_0 > 0$  (línea continua) y a una distancia igual a 2.28 cm cuando  $B_0 < 0$  (línea discontinua)

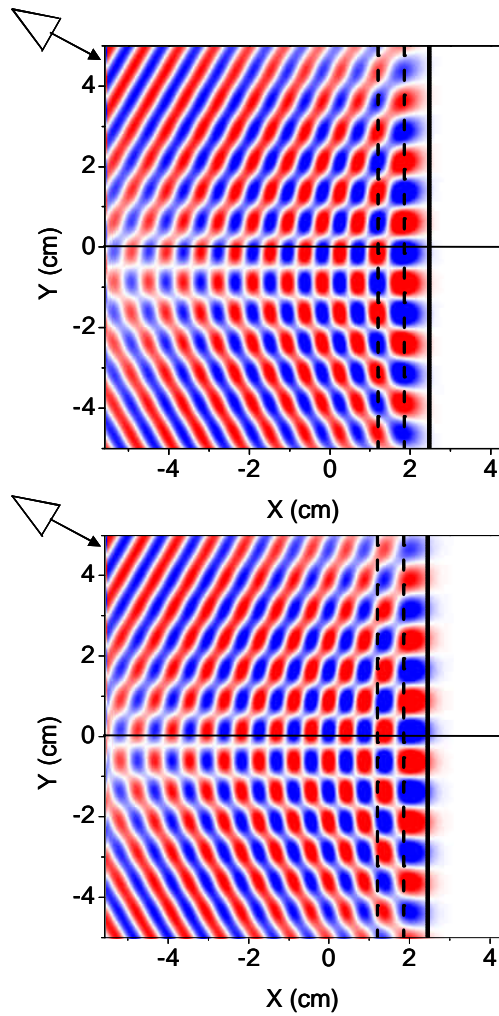


Figura 4.6. Distribución espacial de la componente  $E_y$  del campo eléctrico considerando un plasma plano sin fluctuaciones de densidad (arriba:  $B_0 > 0$ , abajo:  $B_0 < 0$ ). Las líneas verticales indican niveles constantes de densidad de  $2$ ,  $4$  y  $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$  (línea continua = corte para incidencia normal). El haz incide desde la izquierda con un ángulo de  $30^\circ$  como indica la flecha y tiene una anchura  $w_0 / \lambda_0 \approx 6.7$

La figura 4.6 muestra la distribución espacial de la componente  $E_y$  del campo eléctrico de la onda en un instante de tiempo de la simulación. La gráfica superior corresponde a un valor de campo magnético positivo mientras que la inferior corresponde a un valor de campo magnético negativo. La línea continua representa la posición de la capa de corte nominal para incidencia normal ( $n_e \approx 6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ) y las

líneas discontinuas representan dos contornos de densidad electrónica constante que son inferiores a la densidad de corte. El borde del plasma se encuentra en  $X=0$ .

La principal diferencia entre la distribución espacial del campo en estos casos está en la fase del campo eléctrico de la onda en la proximidad de la capa de corte (desplazamiento vertical  $\approx p/2$  en fase). Además, existe un pequeño desplazamiento radial de la capa de corte. Este desplazamiento radial está en claro acuerdo con el resultado obtenido a partir del cálculo de la constante de propagación efectiva mostrada en la figura 4.5. Además, puede observarse que la onda no alcanza la capa de resonancia situada aproximadamente a 3.7 cm del borde del plasma (ver figura 4.4).

A continuación, pasamos a estudiar el efecto de dicha asimetría sobre las medidas que se obtendrían con un reflectómetro Doppler que operase con ese ángulo de inclinación y esa frecuencia de la onda incidente. Las simulaciones se han realizado para una turbulencia generada de forma numérica en dos dimensiones tal y como se describe en el capítulo 3.

Como se explicó en el capítulo 2, el reflectómetro selecciona aquellas fluctuaciones de densidad electrónica en el plasma cuyo número de onda en la dirección perpendicular cumplen la ley de Bragg  $k_{\perp} = 2k_0 \sin \mathbf{q}_0$ . Además, la velocidad de propagación de las fluctuaciones de densidad en dicha dirección provoca un desplazamiento Doppler de la frecuencia dado por  $f_D = 2(v_{\perp}/\mathbf{l}_0) \sin \mathbf{q}_0$ .

La figura 4.7 muestra los espectros en frecuencia de la amplitud compleja ( $Ae^{if}$ , con  $A$  y  $f$  la amplitud y la fase de la onda respectivamente) de la señal que, tras reflejarse en el plasma, llega a la antena receptora, considerando campo magnético positivo (arriba) y negativo (abajo). Para hacer los resultados independientes del valor particular de la velocidad de rotación del plasma, los espectros se han representado en función del parámetro adimensional  $f/f_D$  donde  $f_D$  es el valor teórico del desplazamiento Doppler. El haz que se ha considerado es idéntico al mostrado en la figura 4.6 y la turbulencia tiene un valor cuadrático medio igual a 10% en todo el plasma.

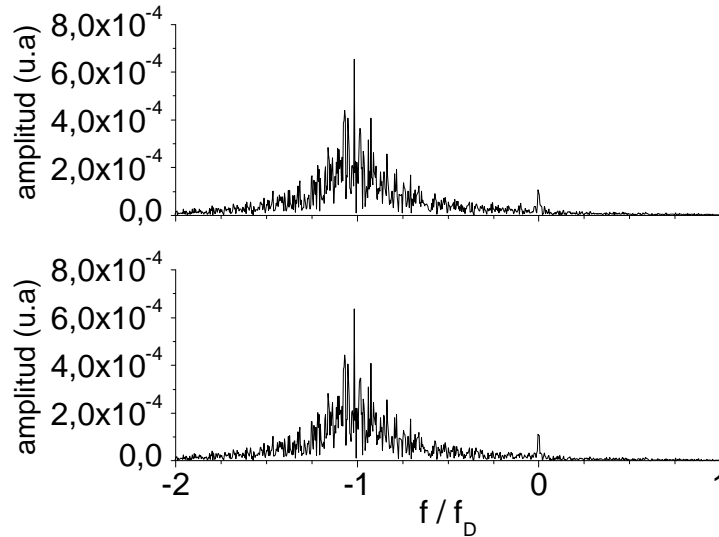


Figura 4.7. Espectro de la amplitud compleja ( $Ae^{if}$ ) de la señal recibida para  $B_0 > 0$  (arriba) y  $B_0 < 0$  (abajo). El valor cuadrático medio de la turbulencia es 10%, la anchura del haz es  $w_0 / \mathbf{l}_0 \approx 6.7$  y el ángulo de propagación es  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$

Como puede observarse en la figura, los espectros obtenidos a partir de la simulación son prácticamente indistinguibles. El desplazamiento Doppler, la anchura y la amplitud del espectro son muy similares en los dos casos considerados. Esto se debe a que el pequeño desplazamiento radial que se produce en la capa de corte no es suficiente para modificar apreciablemente los espectros ni la potencia reflejada por el plasma. La diferencia entre la potencia recibida en la antena (integral del espectro de potencia de la amplitud compleja) es inferior al 2% en ambos casos.

Un análisis similar se ha realizado para el reflectómetro en modo X instalado en el tokamak ASDEX-Upgrade (Garching, Alemania). Debido a que el radio de curvatura del plasma en la zona de medida del reflectómetro es grande, el plasma se asemeja bastante a un plasma plano. La potencia reflejada, estimada a partir de las simulaciones, resultó ser independiente de la polaridad de  $B_0$  dentro de un 2% de error [38].

Como puede observarse en la figura, el valor que se obtiene para el desplazamiento Doppler coincide muy bien con su valor teórico en los dos casos y, por tanto, la velocidad de rotación del plasma que se obtiene coincide con la velocidad de rotación real del plasma. Sin embargo, en este apartado solamente se pretende mostrar que los efectos de la asimetría en las medidas son despreciables, a pesar de considerar un ángulo de inclinación tan grande. Posteriormente en el capítulo 6, se analizarán los

factores que determinan la fiabilidad de la medida de la velocidad de rotación del plasma.

Veamos ahora qué ocurre cuando introducimos la forma real del plasma de TJ-II sin considerar por ahora los efectos asociados a la presencia de la turbulencia. El radio de curvatura de la capa de corte es 25 cm aproximadamente y el perfil de densidad es idéntico al mostrado en la figura 4.4. El haz gaussiano incide con un ángulo  $q_0 = 30^\circ$  con respecto a las superficies de densidad constante y tiene una anchura  $w_0 / l_0 \approx 6.7$ .

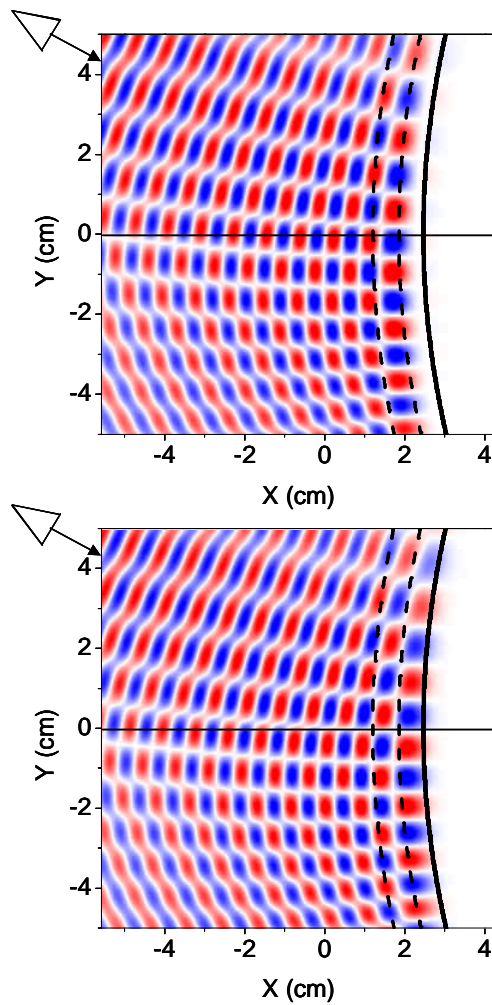


Figura 4.8. Distribución espacial de la componente  $E_y$  del campo eléctrico considerando el plasma de TJ-II sin fluctuaciones de densidad (arriba:  $B_0 > 0$ , abajo:  $B_0 < 0$ ). Las líneas indican niveles de densidad constante de  $2, 4$  y  $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$  (línea continua = corte para incidencia normal). El haz incide desde la izquierda con un ángulo de  $30^\circ$  como indica la flecha y tiene una anchura  $w_0 / l_0 \approx 6.7$

La figura 4.8 muestra la distribución espacial de la componente  $E_y$  del campo eléctrico de la onda. Al igual que antes, la gráfica superior muestra la distribución espacial de la componente  $E_y$  cuando el campo magnético del dispositivo es positivo mientras que la gráfica inferior se obtiene invirtiendo el sentido del campo magnético. También aparecen representados tres contornos de densidad constante en el plasma y la línea continua corresponde a la densidad de corte para incidencia normal. Como puede observarse, la distribución espacial muestra nuevamente un desplazamiento vertical de la fase cerca de la posición de la capa de corte al invertir la polaridad del campo magnético. Además, también puede observarse que existe un pequeño desplazamiento radial de la capa de corte.

A continuación, pasamos a estudiar el efecto de esta asimetría en presencia de fluctuaciones de densidad.

La figura 4.9 muestra los espectros en frecuencia de la amplitud compleja de las señales que se reciben en la antena receptora para valores positivos (arriba) y negativos (abajo) del campo magnético. La turbulencia tiene un valor cuadrático medio igual a 10%, el haz una anchura  $w_0 / \mathbf{l}_0 \approx 6.7$  y la inclinación de la antena es  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ .

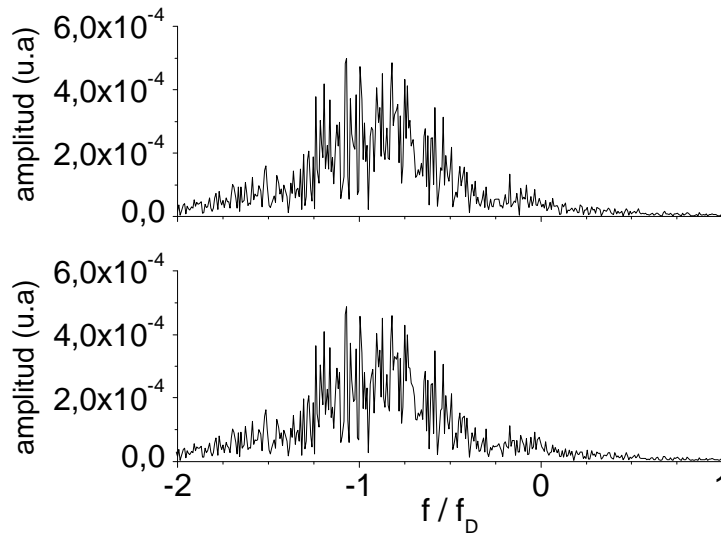


Figura 4.9. Espectro de la amplitud compleja ( $Ae^{if}$ ) de la señal recibida en la antena receptora para  $B_0 > 0$  (arriba) y  $B_0 < 0$  (abajo). El valor cuadrático medio de la turbulencia es 10%, la anchura del haz es  $w_0 / \mathbf{l}_0 \approx 6.7$  y el ángulo de propagación es  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ .

Como puede observarse en la figura, los dos espectros son casi idénticos. La diferencia en la potencia recibida en cada caso es, nuevamente, menor que un 2%. Es decir, la inversión en el sentido del campo magnético no parece afectar a este tipo de medidas. En el origen de frecuencias puede verse un aumento en la amplitud del espectro; esta contribución al espectro proviene del orden 0 de difracción que se recibe en la antena receptora. El desplazamiento Doppler del espectro es similar en ambos casos y muy parecido a los que se obtuvieron considerando un plasma plano. Sin embargo, la anchura de la estructura Doppler es mayor en estos casos. Como veremos en el capítulo 6, este fenómeno no está relacionado con la asimetría sino con la curvatura del plasma de TJ-II.

En resumen, las simulaciones muestran que los efectos de la asimetría son claros en plasmas en los que la separación radial entre la posición de la capa de corte y la posición de la resonancia es pequeña. En estos casos, la asimetría se observa claramente cuando se emplean haces cuya divergencia es considerable y/o cuando el radio de curvatura de la capa de corte es pequeño. Las simulaciones realizadas empleando plasmas característicos de dispositivos tipo stellarator o tokamak muestran que la asimetría no tiene un efecto apreciable en las medidas obtenidas con reflectometría Doppler.

# CAPÍTULO 5

## MEDIDA DE FLUCTUACIONES DE DENSIDAD

### 5.1. DESCRIPCIÓN DEL REFLECTÓMETRO INSTALADO EN TJ-II

Para caracterizar las fluctuaciones de densidad en los plasmas del stellarator TJ-II, se ha instalado un reflectómetro heterodino de banda ancha. El sistema emplea el modo extraordinario de polarización con incidencia normal y permite lanzar al plasma ondas electromagnéticas cuyas frecuencias se encuentran en el rango 33-50 GHz. La banda de frecuencias elegida permite realizar medidas en todo el rango de densidades que se alcanza en los plasmas generados y calentados mediante la inyección de microondas ( $n_e = 0.3 - 1.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ). Sin embargo, la forma de los perfiles de densidad, planos o incluso huecos en la parte central del plasma, hace que el rango accesible por el reflectómetro esté limitado a posiciones radiales superiores a  $r = r/a \approx 0.6$ , donde  $r$  es la posición radial del plasma,  $a$  es el radio medio del plasma y  $r$  se conoce con el nombre de radio efectivo del plasma. La figura 5.1 muestra un diagrama del reflectómetro instalado en el stellarator TJ-II.

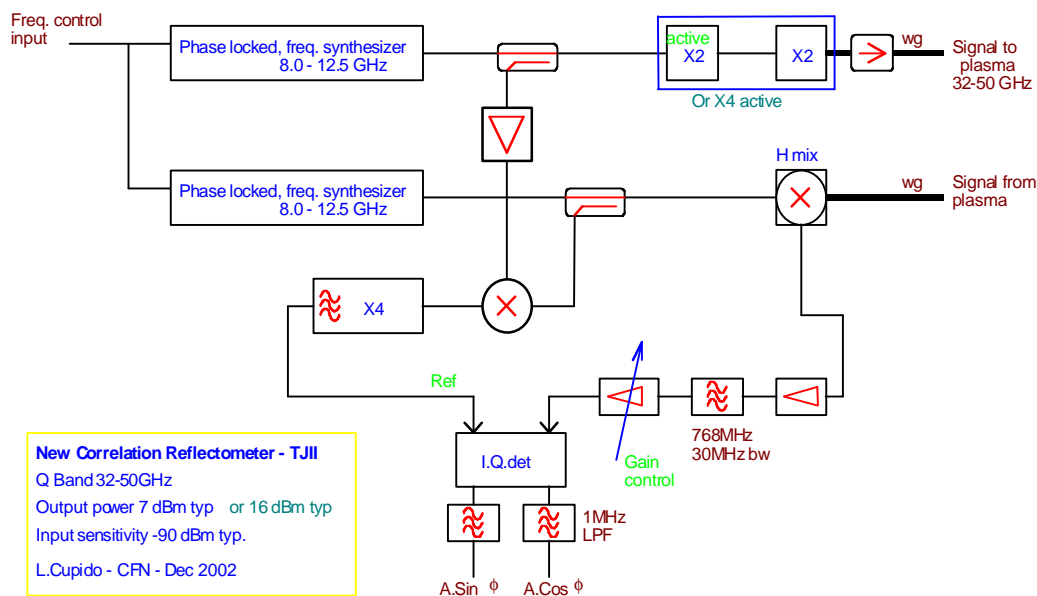


Figura 5.1. Diagrama del reflectómetro instalado en TJ-II para la medida de fluctuaciones de densidad

La onda que se lanza al plasma se genera mediante un oscilador de microondas que emite una señal en la banda de frecuencias 8-12.5 GHz. La banda de frecuencias de funcionamiento del reflectómetro (33-50 GHz) se obtiene mediante un multiplicador de frecuencias cuyo factor de multiplicación es igual a cuatro. La potencia de la señal a la salida del multiplicador de frecuencias es 16 dBm y se conduce al plasma mediante una guía de ondas rectangular que alimenta a una antena estándar de tipo piramidal (no mostrada en la figura). Un segundo oscilador idéntico al primero se emplea para realizar una detección heterodina de la señal reflejada por el plasma. Finalmente, se obtienen dos señales  $A \sin f$  y  $A \cos f$ , donde  $A$  y  $f$  son, respectivamente, la amplitud y fase de la onda reflejada en el plasma. Una descripción más completa sobre los detalles técnicos del reflectómetro puede encontrarse en [39].

La principal característica del reflectómetro es la posibilidad de sintonizar, en una fracción de milisegundo, cualquier frecuencia en el rango 33-50 GHz manteniendo sincronizados los dos osciladores con la misma estabilidad que tendría un sistema que trabajase a frecuencia fija. Esto permite diagnosticar diferentes capas radiales del plasma durante la descarga en tiempos muy pequeños.

Para garantizar una propagación de la onda en modo X lo más pura posible (mínima componente en modo O), el campo eléctrico de la onda ha de ser perpendicular al campo magnético del dispositivo. En TJ-II, el ángulo de inclinación del campo magnético con respecto a la dirección toroidal es próximo a  $24^\circ$  en un amplio rango de configuraciones magnéticas, siendo la desviación máxima con respecto a este valor de  $\pm 2^\circ$ . Por este motivo, las antenas del reflectómetro se encuentran inclinadas  $24^\circ$  con respecto a la dirección toroidal del dispositivo.

La figura 5.2 muestra la posición de las guías de onda, los giros de  $24^\circ$  para inclinar las antenas, las antenas (emisora y receptora) y el plasma en el interior de la cámara de vacío del TJ-II.

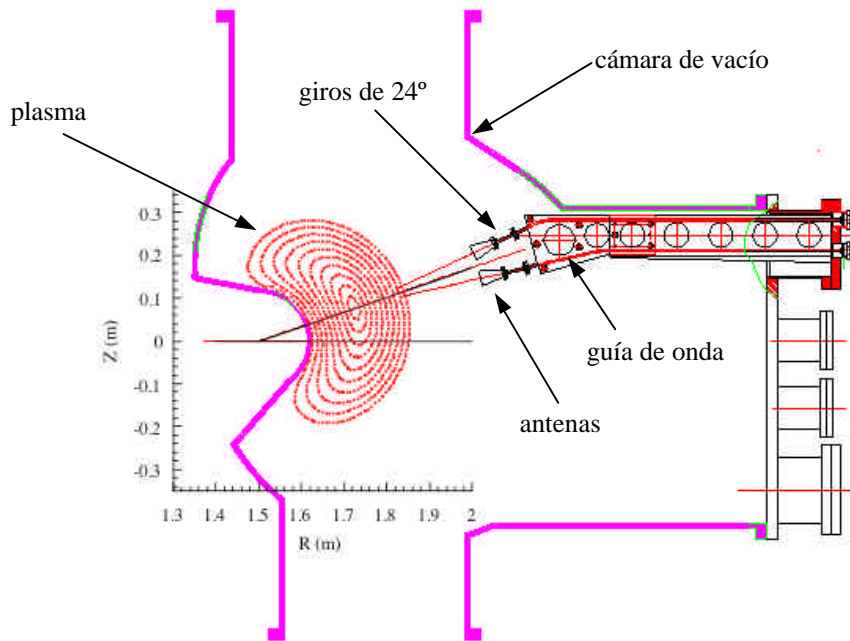


Figura 5.2. Disposición de las antenas y las guías de onda en el interior de la cámara de vacío de TJ-II. También se muestra la forma y posición del plasma para la configuración magnética estándar de TJ-II

Como puede observarse en la figura, la orientación de las antenas es tal que la bisectriz de las líneas de visión es perpendicular a las superficies de densidad constante. Sin embargo, en estos sistemas es habitual que exista un pequeño desalineamiento de las antenas con respecto a dicha perpendicular. Esto puede ser debido a defectos en el montaje de las guías de onda y antenas. Como ya se comentó anteriormente, el fenómeno de la deriva de la fase se debe a una rotación del plasma en la dirección perpendicular y a un desalineamiento en el sistema de antenas; ambos factores hacen que el espectro de la señal recibida en la antena no sea simétrico. En TJ-II, los espectros que se obtienen experimentalmente son asimétricos, lo que indica que existe un pequeño desalineamiento en el sistema de antenas. No obstante, este desalineamiento no constituye un problema para el funcionamiento del reflectómetro y, de hecho, ha permitido obtener información sobre la rotación del plasma en diferentes posiciones radiales del mismo.

Recordemos que en el capítulo 2, se explicó cómo una inclinación deliberada de las antenas podría emplearse para medir la velocidad de rotación perpendicular del plasma. Sin embargo, como veremos en el capítulo 6, la medida de esta velocidad necesita un diseño óptimo del reflectómetro adaptado a las características de cada dispositivo. El reflectómetro instalado en TJ-II no fue diseñado para este fin y, por tanto, no puede

emplearse para medir la velocidad de rotación del plasma, aunque como veremos sí es posible determinar el sentido de dicha rotación.

## 5.2. Resultados experimentales

Medidas realizadas con las sondas de Langmuir instaladas en el stellarator TJ-II muestran que existe un valor crítico para la densidad media  $\langle n_e \rangle$  del plasma a partir del cual se generan capas con cizalladura en la velocidad perpendicular de las fluctuaciones de densidad [40, 41]. Experimentalmente se ha encontrado que este valor crítico depende de la configuración magnética y de las condiciones de calentamiento del plasma (de la potencia inyectada y del perfil de deposición de potencia). Esto sugiere que la densidad crítica puede depender de los gradientes existentes en parámetros del plasma tales como densidad, temperatura o presión. Esta dependencia está siendo estudiada experimentalmente para tratar de comprender el origen de esta aparición espontánea de capas con cizalladura en la velocidad. Los experimentos que se describen en este capítulo se han obtenido en la configuración estándar y el valor de la densidad crítica es  $\langle n_e \rangle_{crítica} \approx 0.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ .

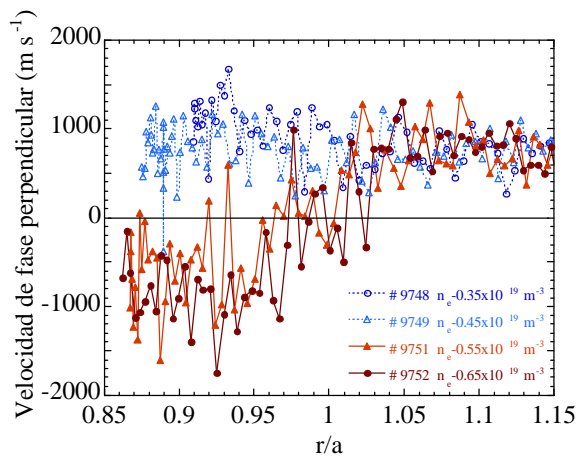


Figura 5.3. Velocidad de fase perpendicular medida con sondas de Langmuir para diferentes densidades medias del plasma  $\langle n_e \rangle = 0.35, 0.45, 0.55, 0.65 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  en función del radio normalizado del plasma

La figura 5.3 muestra la velocidad de fase perpendicular de las fluctuaciones de densidad que se mide con las sondas de Langmuir en diferentes posiciones radiales en torno al borde del plasma ( $r/a = 1$ ). En ella se representan los resultados obtenidos en cuatro descargas en las que la densidad media del plasma se incrementa desde un valor  $\langle n_e \rangle \approx 0.35 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  inferior al valor crítico, hasta un valor  $\langle n_e \rangle \approx 0.65 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  superior al valor crítico. En las descargas #9748 y #9749 la densidad media del plasma es  $\langle n_e \rangle \approx 0.35 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  y  $\langle n_e \rangle \approx 0.45 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ , mientras que en las descargas #9751 y #9752 la densidad media es  $\langle n_e \rangle \approx 0.55 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  y  $\langle n_e \rangle \approx 0.65 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ , respectivamente.

Como puede observarse en la figura, si la densidad media del plasma es inferior al valor crítico la velocidad de rotación de las fluctuaciones es positiva independientemente de la posición radial y su valor es, aproximadamente, +1000 m/s. Sin embargo, cuando la densidad media del plasma es superior al valor crítico se produce una inversión en el sentido de rotación del plasma (de +1000 m/s a -1000 m/s) en una zona interior a la última superficie magnética cerrada del dispositivo ( $r/a = 1$ ). En la figura puede verse que la capa con cizalladura en la velocidad (aquella en la que la velocidad se anula) se encuentra en una posición radial próxima a  $r/a = 1$ .

Los resultados experimentales obtenidos con las sondas también muestran que si la densidad del plasma se aproxima al valor crítico se produce un aumento del nivel de turbulencia en el borde del plasma [40, 41]. Estos resultados indican que existe una relación entre el nivel de turbulencia y la aparición de esta capa con cizalladura en la velocidad. Una vez que la capa se ha formado, el nivel de fluctuaciones disminuye ligeramente a medida que se incrementa la densidad del plasma.

La aparición espontánea de esta capa con cizalladura en la velocidad de rotación se ha estudiado con el reflectómetro modificando el valor de la densidad del plasma alrededor del valor crítico durante la descarga de plasma [42]. En el experimento que se describe a continuación, la frecuencia del reflectómetro se fija a un valor igual a 34 GHz. Para esta frecuencia, la capa de corte se encuentra muy próxima ( $r/a \approx 0.8$ ) a la región del plasma donde las sondas de Langmuir observan la inversión en la velocidad de rotación del plasma ( $r/a \approx 0.9$ ).

La figura 5.4a muestra la evolución temporal de la densidad media del plasma (línea continua) a lo largo de la descarga. En la figura también aparece representada la evolución temporal de la frecuencia media  $\langle f \rangle$  de los espectros de potencia de la amplitud compleja (línea discontinua). La frecuencia media de los espectros se ha calculado mediante la siguiente expresión:

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_i f_i \cdot S^2(f_i)}{\sum_i S^2(f_i)} \quad (5.1)$$

donde  $S(f_i)$  es la amplitud del espectro correspondiente a la componente en frecuencia  $f_i$ .

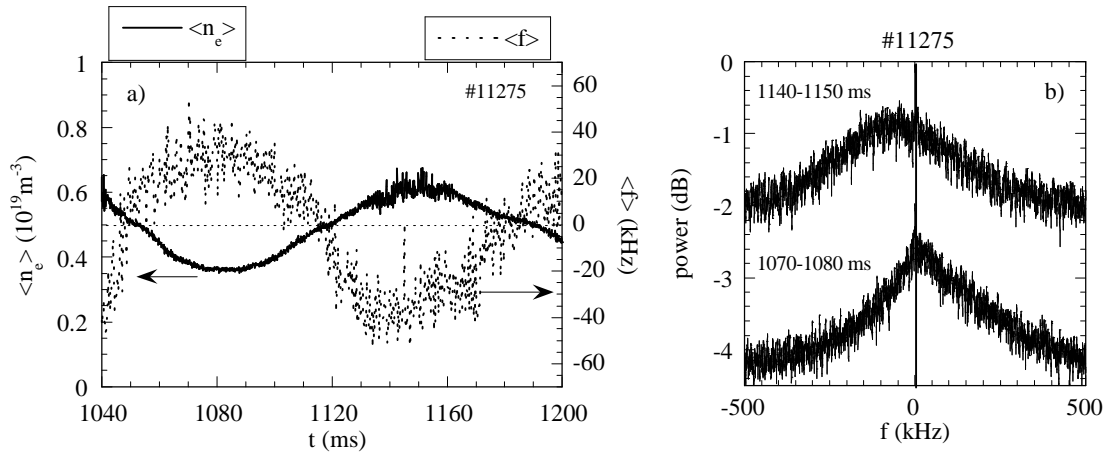


Figura 5.4. (a) Evolución temporal de la densidad media del plasma y la frecuencia media del espectro de potencia de la amplitud compleja  $Ae^{if}$  ( $A$  y  $f$  son, respectivamente, la amplitud y fase de la onda reflejada) de la señal reflejada en  $r = 0.8$ . (b) Espectro de potencia de la amplitud compleja en dos intervalos de tiempo diferentes 1070-1080 ms (abajo) y 1140-1150 ms (arriba), en los que la densidad es inferior y superior al valor crítico respectivamente

Como puede observarse en la figura 5.4a, si la densidad media del plasma es inferior al valor  $\langle n_e \rangle_{crítica}$ , la frecuencia media de los espectros es positiva. Sin embargo, cuando la densidad media supera este valor se produce una inversión en el

signo de la frecuencia media de los espectros. En el ejemplo mostrado en la figura 5.4, la velocidad de fase de las fluctuaciones en la dirección perpendicular que se mide con las sondas de Langmuir en la zona  $r/a \approx 0.8$  invierte su sentido desde un valor  $+10^3$  hasta  $-10^3$  m/s cuando la densidad media del plasma se incrementa desde  $0.4$  hasta  $0.6 \cdot 10^{19}$  m $^{-3}$ .

La figura 5.4b muestra los espectros de potencia de la amplitud compleja que se obtienen durante dos intervalos de tiempo 1070-1080 ms (espectro inferior) y 1140-1150 ms (espectro superior) en los que la densidad media del plasma es, respectivamente, menor y mayor que el valor crítico. En ella puede observarse claramente un desplazamiento hacia frecuencias positivas en el espectro inferior y un desplazamiento hacia frecuencias negativas en el espectro superior consecuencia de la inversión en el sentido de rotación del plasma.

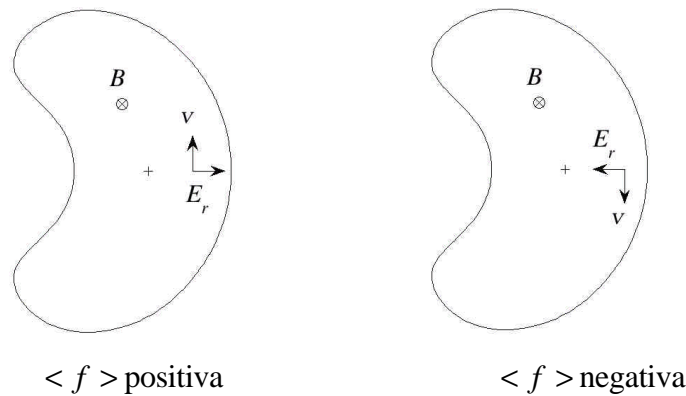


Figura 5.5. Relación entre la frecuencia media de los espectros y el sentido de rotación de las fluctuaciones de densidad. También se indica el sentido del campo eléctrico radial que produciría la rotación en cada caso y la dirección del campo magnético.

Recientemente, la inversión en la velocidad de rotación del plasma también se ha observado mediante un sistema de cámaras rápidas que permite visualizar las fluctuaciones de densidad en el borde del plasma [43]. La comparación entre las medidas obtenidas con el reflectómetro y las que se obtienen con las sondas de Langmuir y las cámaras rápidas nos muestra que el desalineamiento de las antenas en el reflectómetro es tal, que valores negativos/positivos de la frecuencia media de los espectros significan rotación del plasma en la dirección diamagnética de los electrones/iones. La figura 5.5 muestra gráficamente la relación existente entre la frecuencia media de los espectros y el sentido de la velocidad de rotación del plasma.

El comportamiento de la turbulencia en zonas radiales más internas del plasma, no accesibles para las sondas de Langmuir, se ha estudiado cambiando la frecuencia del reflectómetro durante la descarga. Se han escogido diferentes descargas en las que la densidad del plasma no varía significativamente con respecto a su valor medio. La densidad media se incrementa sucesivamente de descarga en descarga comenzando con un valor medio inferior a  $\langle n_e \rangle_{crítica}$  y finalizando con un valor medio superior al  $\langle n_e \rangle_{crítica}$ .

La figura 5.6a muestra la frecuencia de la onda que se lanza al plasma y la densidad del plasma en cada instante de tiempo en tres descargas en las que la densidad media es inferior (#11289), próxima (#11291) y superior (#11294) al valor crítico. La figura 5.6b muestra la frecuencia media de los espectros que se obtienen para cada frecuencia del reflectómetro. En esta figura también se muestra la frecuencia media de los espectros que se obtienen en una cuarta descarga (círculos negros) en la que la densidad media es considerablemente superior ( $\langle n_e \rangle \approx 0.9 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ) a la crítica. En todos los casos mostrados, la frecuencia media de los espectros y la barra de error se calculan como el valor medio y la desviación estándar del centro de gravedad de varios espectros calculados durante los 5 ms en los que la frecuencia de la onda incidente no varía. La figura 5.6c muestra los mismos resultados representados en función de la posición radial del plasma en la que se produce la reflexión de la onda.

Como puede observarse en las figuras 5.6b y 5.6c, si la densidad del plasma se encuentra por debajo de la densidad crítica (triángulos), la frecuencia media de los espectros es siempre positiva independientemente de la frecuencia empleada, es decir, independientemente de la posición radial de la medida. Cuando la densidad del plasma es ligeramente superior (cuadrados) al valor crítico entonces la inversión en la frecuencia media de los espectros se observa sólo en las frecuencias más bajas del reflectómetro (zona más periférica del plasma). Sin embargo, para las frecuencias más elevadas del reflectómetro (zona más interna del plasma) sigue siendo positiva. Esto significa que de forma simultánea a la aparición de la capa con cizalladura en  $r = 1$ , se forma otra capa radial más interna que también presenta una cizalladura en la velocidad de rotación de las fluctuaciones.

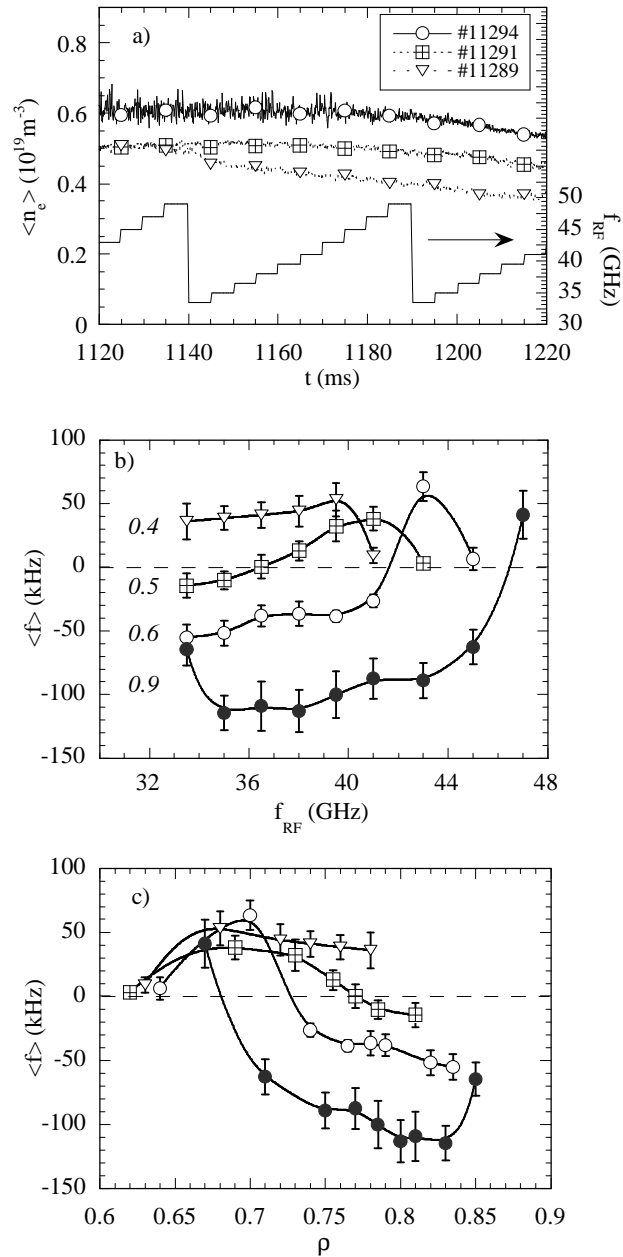


Figura 5.6. (a) Evolución temporal de la densidad media del plasma en tres descargas con densidad inferior (#11289, triángulos), próxima (#11291, cuadrados) y superior (#12294, círculos blancos) a la densidad crítica ( $\langle n_e \rangle_{\text{crítica}} \approx 0.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ). También se muestra la frecuencia del reflectómetro en cada instante de tiempo. (b) Frecuencia media de los espectros de amplitud compleja para las diferentes frecuencias incidentes en las tres descargas mostradas en (a) y en una cuarta descarga con mayor densidad media ( $\langle n_e \rangle \approx 0.9 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ , círculos negros). (c) Los mismos resultados que (b) representados en función de la posición de la capa de corte

La figura 5.6c muestra que la posición radial de esta segunda capa con cizalladura se encuentra localizada en  $r \approx 0.8$  cuando la densidad media del plasma  $\langle n_e \rangle \approx 0.5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  (cuadrados). La figura 5.6c también muestra que la posición radial de esta capa depende del valor de la densidad media del plasma. A medida que la densidad media del plasma se incrementa por encima del valor crítico, la segunda capa con cizalladura en la velocidad se encuentra cada vez en zonas más internas. En la figura puede verse que dicha capa se encuentra en  $r \approx 0.7$  cuando la densidad media del plasma es  $\langle n_e \rangle \approx 0.9 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ .

La figura 5.7 muestra varios espectros de potencia de la amplitud compleja en la descarga con densidad  $\langle n_e \rangle \approx 0.9 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . La frecuencia de la onda incidente en el plasma es (de arriba hacia abajo) 47, 43, 38 y 33.5 GHz y la posición radial en la que la onda se refleja en el plasma es  $r = 0.67, 0.75, 0.8$  y  $0.85$ , respectivamente. En la figura también se ha incluido la frecuencia media  $\langle f \rangle$  de cada espectro.

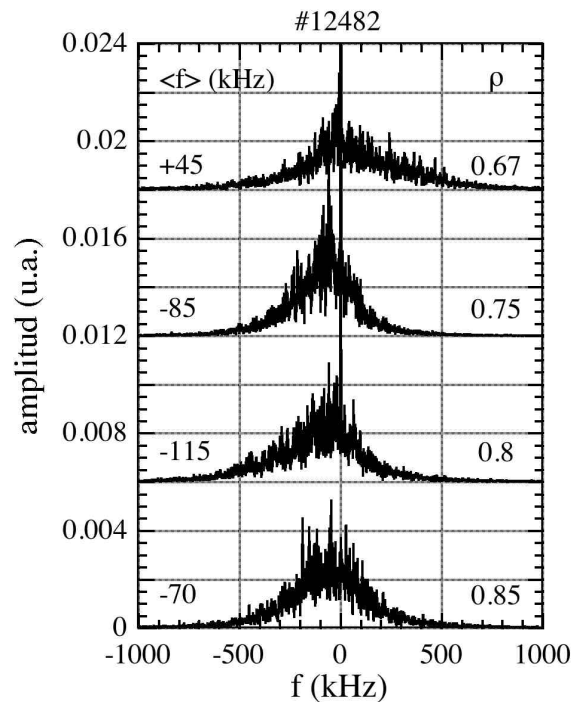


Figura 5.7. Espectro de potencia de la amplitud compleja medida en cuatro posiciones radiales diferentes (de arriba hacia abajo)  $r = 0.67, 0.75, 0.8, 0.85$  para la descarga #12482 con  $\langle n_e \rangle \approx 0.9 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . La frecuencia de la onda incidente es 47, 43, 38 y 33.5 GHz respectivamente

En los experimentos descritos anteriormente, los perfiles radiales del potencial eléctrico se midieron empleando el diagnóstico HIBP [44] instalado en TJ-II. Los resultados de las medidas muestran que en los plasmas cuyas densidades medias son inferiores al valor crítico, el potencial eléctrico se incrementa desde el borde del plasma hasta el centro del mismo y, por tanto, el campo eléctrico radial es positivo en todo el plasma. Las medidas también muestran que al incrementar la densidad media del plasma por encima del valor crítico, se observa que el campo eléctrico radial es negativo en el borde y positivo en el centro [45]. Estas medidas muestran que la inversión en la velocidad de rotación de las fluctuaciones de densidad que se observa con el reflectómetro está dominada en su mayor parte por el campo eléctrico radial (deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$ ). Y, por tanto, podemos interpretar que un valor negativo/positivo de la frecuencia media de los espectros significa un campo eléctrico radial  $E_r$  en la capa de corte negativo/positivo (ver figura 5.5).

El desplazamiento radial de la segunda capa con cizalladura hacia posiciones radiales más internas a medida que aumenta la densidad del plasma se podría explicar en base a argumentos neoclásicos. Los cálculos neoclásicos del transporte de partículas y de energía realizados para los plasmas de TJ-II [46] muestran que el campo eléctrico radial es positivo en la zona central del plasma de TJ-II y negativo en la zona periférica. Si la densidad del plasma se incrementa, se produce un aumento en el gradiente de la densidad que ocasiona un flujo de iones relativamente alto hacia el exterior del plasma. Debido a esto y para mantener la condición de cuasi-neutralidad del plasma se genera un campo eléctrico radial negativo que tiende a reducir el flujo de iones. Como consecuencia de esto, el campo eléctrico en la zona central del plasma se reduce y se intensifica en el borde (manteniéndose negativo).

Otro fenómeno que también se observa en las señales del reflectómetro es un incremento en la frecuencia media (en valor absoluto) de los espectros que se obtienen cuando la densidad del plasma se incrementa por encima del valor crítico (ver figuras 5.6b y 5.6c). Este aumento, en principio, podría interpretarse como un incremento en la velocidad de rotación del plasma. De hecho, las medidas realizadas con el HIBP muestran un incremento en el campo eléctrico radial y, por tanto, en la velocidad de deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  cuando la densidad se incrementa por encima del valor crítico. Sin

embargo, hay que tener en cuenta que el reflectómetro no fue diseñado para medir la velocidad de rotación perpendicular de las fluctuaciones de densidad y no está optimizado para separar adecuadamente los dos primeros órdenes de difracción (orden cero y primer orden) en la antena receptora. Debido a esto, ambos órdenes contribuyen al centro de gravedad del espectro y, posiblemente, la contribución de cada orden depende de una forma diferente (y desconocida) del nivel de turbulencia. Por tanto, un cambio en el nivel de turbulencia podría modificar el valor de la frecuencia media de los espectros sin que ello signifique necesariamente una modificación en la velocidad de rotación del plasma.

Los datos mostrados en la figura 5.6c indican que la inversión en la velocidad de rotación del plasma se produce en una zona radial muy estrecha, del orden de 1 cm. Este valor relativamente pequeño (comparable con la longitud de onda de la onda incidente en el plasma) muestra la capacidad del reflectómetro para medir la inversión en la rotación del plasma con una resolución espacial muy buena. Este hecho ha sido estudiado con el código de onda completa descrito en el capítulo 3 y los resultados obtenidos se muestran en el siguiente apartado.

### 5.3. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Las primeras simulaciones realizadas con el código indican que un desalineamiento de las antenas tan pequeño como  $2^\circ$  podría explicar los espectros asimétricos que se obtienen experimentalmente y que se mostraron en la sección anterior. Considerando este ángulo de inclinación de las antenas, se ha estudiado el comportamiento de las señales del reflectómetro en plasmas que presentan una capa con cizalladura en la velocidad de rotación y cuya extensión radial es relativamente pequeña. Para realizar este estudio hemos considerado una velocidad perpendicular de las fluctuaciones de densidad igual a  $v_p = -3000$  m/s en el borde del plasma que se mantiene constante hasta  $r \approx 0.8$ . A partir de esta zona, la velocidad de rotación varía de forma lineal en una región cuya anchura radial es  $dx = 4$  mm alcanzando un valor igual a  $v_p = +3000$  m/s al final de la misma. A partir de esta capa y hacia posiciones más internas del plasma, la velocidad de rotación permanece igual a  $v_p = +3000$  m/s.



sobrepasar ligeramente la capa con cizalladura para que el cambio en la velocidad de rotación del plasma sea visible en las señales de reflectometría. Además, el hecho de que la capa donde se refleja la onda tenga una cierta extensión radial limita la posibilidad de medir capas que presenten cambios muy rápidos en la velocidad de rotación. En este caso particular, la extensión radial necesaria para medir la inversión en la frecuencia media de los espectros es, aproximadamente, 8 mm. Este valor obtenido con las simulaciones reproduce la resolución espacial observada en los experimentos en los que la capa con cizalladura tiene una extensión radial de 1 cm aproximadamente y, por tanto, confirma la capacidad del reflectómetro para medir capas con cizalladura con una resolución espacial buena. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la resolución espacial puede depender de parámetros del plasma tales como el gradiente de densidad o las características de la turbulencia.

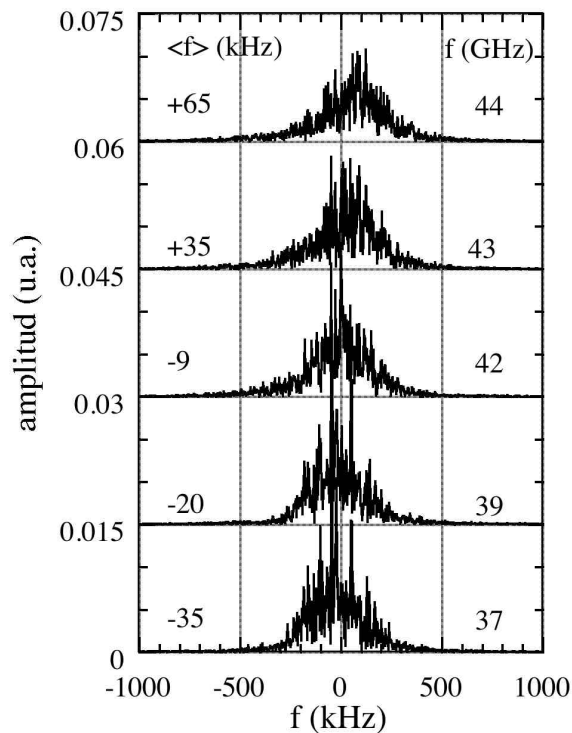


Figura 5.9. Espectro de la amplitud compleja de las señales simuladas para diferentes frecuencias incidentes (de arriba a abajo) 44, 43, 42, 39 y 37 GHz, correspondientes a las posiciones radiales  $r = 0.72, 0.74, 0.76, 0.82, 0.85$ , respectivamente.

La figura 5.9 muestra los espectros de la amplitud compleja que se obtienen en las simulaciones para cinco de las catorce frecuencias incidentes que se mostraron en la figura 5.8. Las frecuencias son  $f = 44, 43, 42, 39$  y  $37$  GHz y la posición de la capa de corte asociada a cada una de estas frecuencias es  $r = 0.72, 0.74, 0.76, 0.82$  y  $0.85$ , respectivamente. En la figura también se especifica la frecuencia media  $\langle f \rangle$  de los espectros de la amplitud compleja correspondientes a cada caso particular.

En la figura 5.8 puede observarse claramente una diferencia entre los valores absolutos de las frecuencias medias que se obtienen en el borde del plasma y en zonas más internas del mismo, a pesar de que la velocidad de rotación es la misma (en valor absoluto) en ambos casos. Como muestra la figura, la frecuencia media del espectro es  $\langle f \rangle \approx -30$  kHz cuando la frecuencia de la onda incidente en el plasma es menor que 37 GHz. En estos casos, la velocidad de rotación de las fluctuaciones en la capa de corte es  $v_p = -3000$  m/s (ver figura 5.8). Sin embargo, la frecuencia media del espectro es  $\langle f \rangle \approx 60 - 70$  kHz cuando la frecuencia de la onda incidente es mayor que 44 GHz. En estos casos, la velocidad en la capa de corte es, exactamente, la opuesta  $v_p = +3000$  m/s.

Esta diferencia puede comprenderse parcialmente si consideramos la curvatura de la capa de corte en cada posición radial del plasma. Una estimación del ángulo de inclinación real debido al cambio en la curvatura de la capa de corte muestra un incremento aproximado de 2 grados al pasar de una capa de corte situada en el borde del plasma ( $r = 1$ ) a otras capas más internas del plasma ( $r \approx 0.6$ ).

Para estudiar este efecto se han realizado simulaciones cambiando el plasma de TJ-II por un plasma plano (sin curvatura) manteniendo el resto de los parámetros sin cambios. En este caso, las simulaciones no muestran una diferencia tan grande entre las frecuencias medias de los espectros que se obtienen a ambos lados de la capa con cizalladura en la velocidad. Los valores absolutos de las frecuencias medias son 25 kHz en la zona periférica y 40 kHz en la zona más interna. No obstante, aún existe una diferencia entre ambos valores que se podría atribuir al valor local de la amplitud de la turbulencia. En nuestro modelo, el nivel de fluctuaciones relativo a la densidad local del plasma  $\tilde{n}_e/n_e$  se mantiene constante en todo el plasma. Esto significa que el nivel

absoluto  $\tilde{n}_e$  de las fluctuaciones se incrementa a medida que nos movemos radialmente hacia el centro del plasma y, como se comentó anteriormente, este hecho podría modificar el centro de gravedad de los espectros obtenidos.

En resumen, los resultados que se han mostrado en este capítulo demuestran la capacidad del reflectómetro instalado en el stellarator TJ-II para medir cambios en el sentido de la velocidad de propagación de las fluctuaciones de densidad. El reflectómetro ha permitido estudiar la capa radial con cizalladura en la velocidad de rotación con buena resolución espacial ( $\approx 1$  cm). Sin embargo, el sistema no es un reflectómetro Doppler y, por tanto, no permite medir el valor de la velocidad de rotación del plasma. Las características que debe tener un reflectómetro de microondas para medir con precisión la velocidad de rotación de las fluctuaciones de densidad se estudian en el capítulo siguiente con ayuda del código de onda completa.

## **CAPÍTULO 6**

# **APLICACIÓN DEL CÓDIGO AL ESTUDIO DE LA REFLECTOMETRÍA DOPPLER**

### **6.1. EFECTOS A TENER EN CUENTA A LA HORA DE DISEÑAR UN REFLECTÓMETRO DOPPLER**

Como se vio en el capítulo 2, la reflectometría Doppler [4-6, 47] permite determinar la velocidad de rotación perpendicular del plasma. Además, la reflectometría Doppler también se puede emplear para medir el espectro en números de onda de las fluctuaciones [48]. Aunque el fundamento de esta técnica es muy sencillo, no está exento de dificultades. Su capacidad para determinar la velocidad de rotación perpendicular del plasma precisa un diseño experimental capaz de separar los diferentes órdenes de difracción en la antena receptora, fundamentalmente el orden cero y el primer orden. La posibilidad de diferenciar ambos órdenes de difracción depende de la resolución espectral  $\Delta k$  del reflectómetro y, por tanto, es imprescindible una adecuada optimización del sistema para la obtención de valores correctos de la rotación del plasma. Esto puede conseguirse con un diseño óptimo del reflectómetro adecuado a las características de cada dispositivo experimental.

Los parámetros que pueden afectar a la resolución espectral son: características de la antena empleada (diagrama de radiación y ángulo de inclinación), propiedades de la onda (frecuencia de la misma y polarización) y las características del plasma (amplitud y espectro de la turbulencia y la curvatura de la capa de corte).

La característica más importante de la antena es su diagrama de radiación. Éste puede caracterizarse mediante el tamaño del haz en la capa de corte (que, en lo sucesivo, lo llamaremos tamaño del spot) y la divergencia del haz. Ambos parámetros influyen en la optimización del sistema [21, 49]. El tamaño de spot óptimo (aquel para el que se obtiene la mejor resolución espectral) depende de la curvatura del frente de onda (es decir, de la divergencia del haz) y de la curvatura del plasma. En el caso ideal

de frentes de onda planos y un plasma sin curvatura, la resolución espectral del sistema mejora al aumentar el tamaño del spot. La resolución espectral, en el caso particular de haces gaussianos con un frente de onda plano y plasma sin curvatura, viene dada por [21]:

$$\frac{\Delta k}{k_{\perp}} = \frac{\sqrt{2}}{w_0 k_0 \sin \mathbf{q}_0} \quad (6.1)$$

donde  $w_0$  es la anchura del haz,  $k_0$  el número de onda en vacío de la onda incidente y  $\mathbf{q}_0$  el ángulo de inclinación de las antenas con respecto a la perpendicular al plasma. En el caso de curvatura finita del plasma y/o del frente de onda, el valor óptimo del spot depende de ambas curvaturas. Por un lado, un spot muy pequeño implicaría muy poca eficiencia debido a las pocas longitudes de onda iluminadas que contribuyen a la difracción y, por tanto, poca intensidad en la señal detectada. Por otro lado, un spot excesivamente grande, haría muy apreciables los efectos debidos a la curvatura del plasma y/o del frente de onda. El problema principal con un tamaño de spot grande en plasmas con curvatura no nula es que el sistema no tiene un ángulo de incidencia bien definido y el sistema es sensible a múltiples números de onda.

Hasta la fecha, la influencia de la curvatura del plasma y del tamaño del spot en la resolución espectral y espacial del reflectómetro ha sido estudiada utilizando simulaciones 2D bajo la aproximación de Born que sólo es válida para niveles bajos de turbulencia [50]. Sin embargo, no hay estudios sistemáticos con códigos de onda completa en dos dimensiones.

El segundo parámetro importante es el ángulo de inclinación de la antena. Por una parte, un ángulo muy pequeño mezclaría la reflexión especular en la capa de corte con el primer orden de difracción y, por otra parte, uno muy grande seleccionaría fluctuaciones de densidad con un número de onda alto de acuerdo con la ley de Bragg  $k_{\perp} = 2k_0 \sin \mathbf{q}_0$ . Esto podría ser un problema si la amplitud de la turbulencia asociada a esos números de onda fuese muy baja.

Otro factor que puede afectar a la medida Doppler es la amplitud de la turbulencia. Los estudios analíticos [51, 52] realizados hasta la fecha predicen que la reflectometría Doppler es capaz de suministrar información sobre la velocidad de rotación del plasma incluso con niveles altos de turbulencia. Estos resultados analíticos han sido confirmados numéricamente con códigos de onda completa en dos dimensiones, pero sólo para un caso concreto de antena y forma del plasma [53].

Otro aspecto a tener en cuenta está relacionado con la amplitud relativa de los diferentes números de onda  $k_{\perp} \pm \Delta k$  seleccionados por el reflectómetro. Este aspecto ha sido estudiado en [19] mediante un código en dos dimensiones que, basándose en la teoría de la óptica física o teoría de Kirchhoff [54], calcula de forma aproximada la amplitud y fase de la onda reflejada en el plasma. En dicho modelo, la zona del plasma en la que la onda se refleja se sustituye por un conjunto de superficies conductoras delgadas con una cierta rugosidad que simula el espectro radial y poloidal de la turbulencia. Dicho modelo describe bastante bien los resultados experimentales y concluye que, bajo las aproximaciones realizadas, la amplitud relativa de los números de onda seleccionados por el diagnóstico puede tener un efecto considerable en las medidas obtenidas. En particular, predice que si la amplitud de los números de onda seleccionados por el reflectómetro no es constante, entonces la frecuencia Doppler que se obtiene en las medidas puede ser diferente al valor teórico que debería obtenerse. Es decir, el valor de la velocidad de rotación del plasma podría subestimarse o sobreestimarse debido a este efecto.

Se hace por tanto necesario validar y extender los resultados obtenidos hasta la fecha, utilizando códigos de onda completa como el descrito en el capítulo 3.

## **6.2. PROCESO DE OPTIMIZACIÓN DE UN REFLECTÓMETRO DOPPLER**

En el apartado anterior hemos comentado que la capacidad de un reflectómetro Doppler para determinar la velocidad de rotación del plasma depende fundamentalmente de la capacidad de separar el orden cero y el primer orden de difracción y que esto puede conseguirse si el sistema tiene una resolución espectral buena. También se han enumerado los diversos factores que afectan a dicha resolución. Sin embargo, no se ha dicho nada sobre el procedimiento a seguir para realizar la

optimización del sistema. En este apartado describimos el proceso de optimización de un reflectómetro Doppler.

Como ya se ha comentado la curvatura del plasma, la curvatura del haz y el tamaño del spot afectan a la resolución espectral del sistema. La dependencia de la resolución espectral con el tamaño del spot y la curvatura efectiva del sistema se puede estimar utilizando la siguiente expresión [21]:

$$\frac{\Delta k}{k_{\perp}} = \frac{\sqrt{2}}{w_0 k_0 \sin \mathbf{q}_0} \left[ 1 + (w_0^2 k_0 / \mathbf{r})^2 \right]^{1/2} \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{r} = R_{beam} R_{plasma} / (R_{beam} + R_{plasma})$  es el radio de curvatura efectivo del sistema que depende de la curvatura del haz  $R_{beam}$  y de la curvatura del plasma  $R_{plasma}$ .

Nótese que en el caso de frente de onda y plasma planos ( $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ) la expresión anterior conduce a la expresión (6.1).

Con el fin de generalizar los resultados y que sean fácilmente aplicables a diferentes dispositivos experimentales, escribiremos la expresión (6.2) en función de los parámetros adimensionales  $w_0 / \mathbf{l}_0$  (tamaño de spot normalizado con la longitud de onda del haz incidente) y  $\mathbf{r} / \mathbf{l}_0$  (radio de curvatura normalizado con la longitud de onda del haz incidente):

$$\frac{\Delta k}{k_{\perp}} = \frac{\sqrt{2}}{2\mathbf{p}(w_0 / \mathbf{l}_0) \sin \mathbf{q}_0} \left[ 1 + 4\mathbf{p}^2 \frac{(w_0 / \mathbf{l}_0)^4}{(\mathbf{r} / \mathbf{l}_0)^2} \right]^{1/2} \quad (6.3)$$

Aunque esta relación es válida, en primera aproximación, para ángulos de incidencia pequeños, la tomamos como punto de partida en nuestra optimización. De hecho, simulaciones realizadas bajo la aproximación de Born [50] muestran la misma dependencia con los parámetros.

Para optimizar el sistema de antenas y mejorar la resolución espectral del sistema, debemos realizar simultáneamente dos cosas. Por un lado, debemos reducir la curvatura del frente de onda y por otro lado, seleccionar el tamaño de spot óptimo.

La curvatura del frente de onda se puede reducir empleando haces gaussianos. Como vimos en el capítulo 3, existe una zona del espacio en la que el frente de onda es plano, independientemente de la anchura del haz. Esta zona corresponde a la posición de la cintura del haz. Desde el punto de vista experimental esto significa que la curvatura del frente de onda puede reducirse utilizando un sistema de lentes que focalice el haz de forma que la capa de corte se encuentre dentro de la zona de Rayleigh y muy cerca de la cintura del haz; tanto más cerca cuanto menor sea el tamaño del spot.

El tamaño del spot óptimo depende de las características de cada experimento. Como veremos a continuación, la expresión (6.3) presenta un valor mínimo para una anchura de haz determinada que depende de la curvatura global del sistema (plasma-haz).

El valor del ángulo de inclinación de la antena depende del rango de números de onda que se deseen caracterizar con el diagnóstico. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, además de las limitaciones mencionadas en el apartado 6.1 de este capítulo, la expresión (6.3) predice que la resolución espectral del sistema empeora a medida que el ángulo de incidencia disminuye. Este hecho junto con la pequeña separación angular existente entre el orden cero y el primer orden de difracción cuando el ángulo de inclinación es pequeño, podría llegar a dificultar o incluso imposibilitar la caracterización de números de onda excesivamente bajos.

La figura 6.1 muestra la dependencia de la resolución espectral dada por la expresión (6.3) en función del parámetro adimensional  $w_0/I_0$  para un plasma cuya capa de corte tiene una curvatura alta como la de los plasmas de TJ-II ( $R_{plasma}/I_0 \approx 30$ ) y un plasma cuya capa de corte es plana ( $R_{plasma}/I_0 = \infty$ ). El ángulo de inclinación de la antena es  $q_0 = 18^\circ$  y la frecuencia de la onda incidente es 40 GHz ( $I_0 = 0.75$  cm). En la figura 6.1 se muestran dos casos diferentes: en el primer caso la cintura del haz se

sitúa en la capa de corte del plasma y, por tanto, el frente de onda es plano ( $\mathbf{r} = R_{plasma}$ ). En el segundo caso la posición de la cintura del haz se sitúa 6 cm delante de la capa de corte. En este caso la curvatura del frente de onda aumenta a medida que disminuimos el tamaño del haz empeorando la resolución espectral. Esta posición relativa entre la cintura de haz y la capa de corte (6 cm) es la misma que la considerada en las simulaciones realizadas empleando haces gaussianos y que se mostrarán en los siguientes apartados de este capítulo.

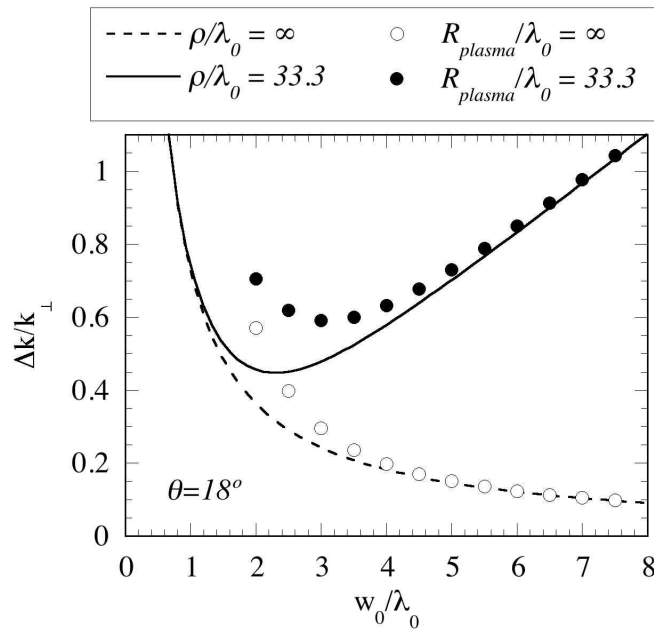


Figura 6.1. Estimación de la resolución espectral  $\Delta k/k_{\perp}$  dada por la expresión (6.3) representada en función de la anchura de haz normalizada con la longitud de onda incidente en vacío  $w_0/\lambda_0$  para dos geometrías diferentes de plasmas; plasma con curvatura alta, como TJ-II ( $R_{plasma}/\lambda_0 \approx 30$ ) con frente de onda plano (línea continua) y plasma sin curvatura ( $R_{plasma}/\lambda_0 = \infty$ ) con frente de onda plano (línea discontinua). Los puntos corresponden a un frente de onda de curvatura variable (a 6 cm de la cintura del haz). El ángulo de inclinación es  $\theta = 18^\circ$  y la frecuencia de la onda incidente es 40 GHz.

Como puede observarse en la figura, en el caso de plasmas con gran curvatura y frente de onda plano (línea continua) existe un tamaño de spot óptimo que hace mínimo el valor de  $\Delta k/k_{\perp}$ . Dicho valor es, aproximadamente,  $w_0/\lambda_0 \approx 2.5$ . Sin embargo, para un plasma sin curvatura y frente de onda plano (línea discontinua) la resolución espectral mejora continuamente conforme se incrementa el tamaño del spot. En el caso

de plasmas con una curvatura alta y frente de onda con una curvatura no despreciable (círculos negros) la resolución espectral se deteriora para tamaños de haz pequeños. Esto se debe al aumento de la divergencia del haz a medida que el tamaño del spot se reduce. Dicho deterioro provoca que el tamaño de spot óptimo se modifique. Como vemos en la figura el valor óptimo del spot se incrementa desde el valor  $w_0 / \lambda_0 \approx 2.5$  hasta el valor  $w_0 / \lambda_0 \approx 3$  cuando se tiene en cuenta la curvatura del frente de onda. Para un plasma plano y curvatura no despreciable del frente de onda (círculos blancos), la resolución espectral se deteriora más rápidamente que en el caso de frente de onda plano (línea discontinua) a medida que la anchura del haz decrece.

### 6.3. RESULTADOS DEL CÓDIGO

Los resultados que se describen a continuación son el resultado de un estudio sistemático sobre la capacidad de la reflectometría Doppler para medir, en condiciones muy diversas, la velocidad de rotación  $v_{\perp}$  del plasma [55]. El código de onda completa se ha utilizado para estudiar el impacto de las características de las antenas empleadas (curvatura del frente de onda y tamaño del spot) y de las características asociadas al plasma (espectro de la turbulencia y curvatura de la capa de corte) en la resolución espectral del sistema y en la determinación de la velocidad de rotación del plasma.

Para estudiar el efecto de la curvatura del frente de onda se han empleado dos antenas con propiedades muy diferentes. Por un lado, se ha considerado una antena estándar de tipo piramidal. En este tipo de antena la divergencia del haz es alta y por tanto, la curvatura del frente de onda es grande. Por otro lado, se han considerado antenas gaussianas en las que la divergencia del haz es pequeña y, consecuentemente, la curvatura del frente de onda es menor. Para este tipo particular de antena se ha modificado el tamaño del spot en un amplio rango de valores para estudiar su efecto en la resolución espectral del sistema y poder comparar los resultados que se obtienen a partir de las simulaciones con los mostrados en la figura 6.1 y que se obtuvieron a través de la expresión aproximada (6.3).

Los efectos asociados a la curvatura de plasma se estudian suponiendo dos casos extremos. Por un lado, se considera un plasma con una curvatura alta, típico de

dispositivos de fusión de tamaño medio. En particular, se toma como ejemplo el plasma del stellarator TJ-II caracterizado por un radio de curvatura en la capa de corte de  $\approx 25$  cm. Por otro lado, se considera un plasma sin curvatura. Este último caso constituye una aproximación muy buena para los plasmas de máquinas de fusión grandes, como por ejemplo ITER, en las que la curvatura del plasma es mucho menor.

El valor cuadrático medio de las fluctuaciones de densidad se fija a un valor constante, siendo el nivel de fluctuaciones  $\tilde{n}_e$  relativo al valor local de la densidad  $n_e$  constante e igual a  $\tilde{n}_e/n_e = 10\%$ .

La frecuencia de la onda incidente es  $f = 40$  GHz en todas las simulaciones y la polarización de la onda corresponde al modo extraordinario de propagación.

Los resultados son independientes de la velocidad de rotación del plasma si la frecuencia de los espectros obtenidos se normaliza con la frecuencia Doppler dada por la expresión  $f_D = v_{\perp}(2/l_0) \sin \mathbf{q}_0$ .

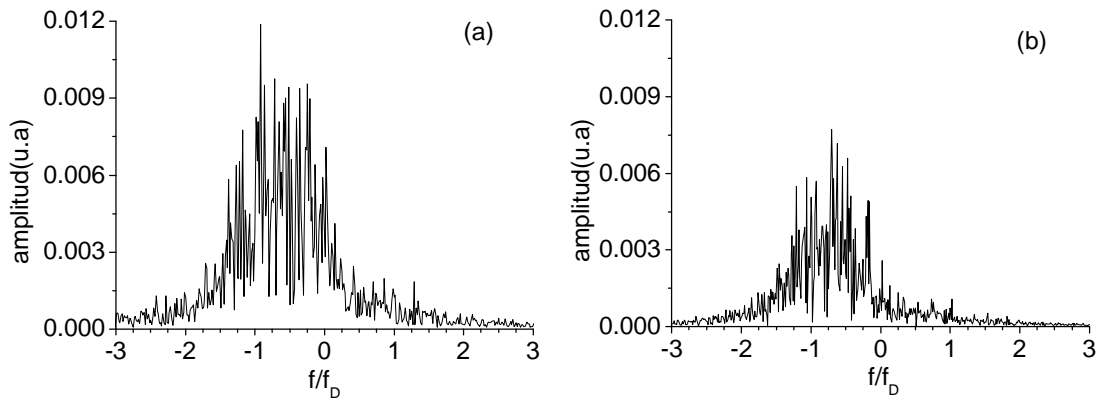


Figura 6.2. Espectros de amplitud compleja  $Ae^{if}$  obtenidos con antenas de microondas estándar tipo piramidal. El ángulo de inclinación es  $\mathbf{q}_0 = 14^\circ$  en la gráfica (a) y  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  en la gráfica (b) y el plasma no tiene curvatura.

Las simulaciones realizadas empleando antenas estándar de microondas tipo piramidal y un plasma sin curvatura muestran que el ángulo de inclinación a partir del cual el primer orden de difracción comienza a separarse del orden cero en la antena receptora es aproximadamente  $15^\circ$ . La figura 6.2 muestra el espectro de la amplitud compleja  $Ae^{if}$  ( $A$  y  $f$  son, respectivamente, la amplitud y fase de la onda reflejada) de la señal recibida en la antena receptora cuando el ángulo de inclinación es  $\mathbf{q}_0 = 14^\circ$  en la gráfica (a) y  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  en la gráfica (b).

Como puede verse en la figura, ambos espectros presentan un desplazamiento Doppler hacia frecuencias negativas consecuencia de la rotación perpendicular del plasma. En el primer caso (a) los dos órdenes de difracción solapan en las proximidades de  $f = 0$ . Este solapamiento hace difícil determinar la frecuencia de la estructura Doppler. Sin embargo, si se incrementa un poco más el ángulo de inclinación de las antenas, (b)  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$ , los dos órdenes de difracción se separarán más claramente y es posible atribuir a cada orden de difracción su contribución al espectro. Este ángulo  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  es el menor ángulo utilizado en las simulaciones que se presentan a continuación.

Antes de mostrar los resultados obtenidos con el código, se describe un procedimiento que permite determinar el valor de la frecuencia Doppler del espectro así como la anchura espectral del mismo.

En primer lugar hay que eliminar las componentes del espectro que provienen del orden cero de difracción y que pueden influir en la posición del máximo de la estructura Doppler del espectro. Esto se puede conseguir fácilmente si la posición del máximo de la estructura Doppler  $f_p$  y su anchura espectral  $\Delta f$  cumple la condición  $\Delta f \ll |f_p|$ . Es decir, si el desplazamiento Doppler del espectro es mucho mayor que su anchura espectral. En estas condiciones, la zona del espectro de frecuencias positivas/negativas, si el desplazamiento Doppler ocurre hacia frecuencias negativas/positivas, proviene prácticamente en su totalidad del orden cero. Al ser dicho orden simétrico respecto al eje  $f = 0$ , podemos restar a todo el espectro (frecuencias positivas y negativas) su contribución. Una vez hecho esto se hace un ajuste del espectro mediante una función gaussiana de la forma  $A_p \exp(-(f - f_p)^2 / (\Delta f)^2)$  donde

$f_p$  nos da la frecuencia Doppler del primer orden de difracción ,  $\Delta f$  su anchura espectral y  $A_p$  su amplitud.

Sin embargo, hay que señalar que este procedimiento, cuando es aplicable, produce una pequeña modificación en los valores de  $f_p$  y  $\Delta f$  con respecto a los que se obtendrían del ajuste empleando el espectro original. Por ejemplo, para el caso mostrado en la figura 6.2.b sin restar la parte simétrica, los valores obtenidos del ajuste son:  $f_p / f_D = 0.77$ ,  $\Delta f / f_D = 0.76$  y  $A_p = 0.003$ , mientras que si se resta son:  $f_p / f_D = 0.83$ ,  $\Delta f / f_D = 0.64$  y  $A_p = 0.003$ . Esta pequeña diferencia entre los valores obtenidos nos indica que en el caso de tener los dos órdenes de difracción bien separados en la antena receptora, las frecuencias Doppler obtenidas en ambos casos son muy próximas. En general, los resultados obtenidos en las simulaciones restando la parte simétrica son más próximos a los valores teóricos que cuando no se resta.

### **6.3.1. Efectos de la curvatura del plasma**

Para estudiar el efecto que la curvatura del plasma tiene en las medidas Doppler y aislar su efecto del provocado por la curvatura del frente de onda, consideramos en primer lugar un haz gaussiano con una directividad alta (baja divergencia del haz y frente de onda muy plano). Para ello, escogemos un haz gaussiano con una cintura de haz  $w_0 / \lambda_0 = 4$  ( $\lambda_0 = 0.75$  cm) localizada, aproximadamente, 6 cm delante de la capa de corte del plasma. La distancia de Rayleigh del haz es  $d_R = \pi w_0^2 / \lambda_0 \approx 38$  cm y el radio de curvatura del frente de onda en la capa de corte es  $R_{beam} = d + d^2 / R \approx 250$  cm. Con estos parámetros, la curvatura global del sistema depende fundamentalmente de la curvatura del plasma y podemos despreciar los efectos debidos a la curvatura del frente de onda.

El ángulo de inclinación de la antena es  $\theta_0 = 18^\circ$  y, por tanto, el sistema selecciona preferentemente fluctuaciones de densidad con números de onda  $k_\perp \approx 5.18$  cm<sup>-1</sup>. La anchura espectral de la turbulencia es  $k_w = 5.4$  cm<sup>-1</sup>. Este valor es representativo de la anchura espectral de las fluctuaciones de densidad medida en el

stellarator TJ-II con diversos dispositivos experimentales tales como el sistema de dispersión Thomson o las sondas de Langmuir [56]. La anchura espectral de la turbulencia normalizada con el número de onda seleccionado por el sistema es  $k_w / k_{\perp} = 1.04$ .

De acuerdo con la figura 6.1, la resolución espectral del sistema que se espera para un plasma con curvatura alta y un haz gaussiano con una cintura de haz  $w_0 / I_0 = 4$  y que se propaga con un ángulo de inclinación de  $18^\circ$  con respecto a la perpendicular al plasma es  $\Delta k / k_{\perp} \approx 0.6$ . Es decir, con los parámetros empleados en la simulación, el sistema debería separar adecuadamente los dos órdenes de difracción ya que la anchura del espectro es inferior al desplazamiento Doppler del mismo. Además, el sistema debería mostrar una resolución espectral aún mejor en el caso de considerar un plasma sin curvatura.

El efecto de la curvatura del plasma en las medidas Doppler se muestra comparando el resultado que se obtiene al considerar un plasma con una curvatura alta ( $R_{plasma} / I_0 \approx 30$ ) con el que se obtiene con un plasma sin curvatura ( $R_{plasma} / I_0 = \infty$ ). En ambos casos, los restantes parámetros de la simulación: anchura espectral y nivel de la turbulencia, perfil de densidad, características del haz y el ángulo de inclinación de la antena se mantienen constantes. Los resultados se muestran en la figura 6.3.

Esta figura muestra el espectro de la amplitud compleja  $Ae^{if}$  de la señal recibida en la antena receptora. El espectro superior corresponde a un plasma con curvatura alta ( $R_{plasma} / I_0 \approx 30$ ) mientras que el espectro inferior corresponde a un plasma sin curvatura ( $R_{plasma} / I_0 = \infty$ ). En la gráfica también pueden verse los valores que se obtienen para la frecuencia de la estructura Doppler,  $f_p$  y su anchura espectral  $\Delta f$  obtenidos a partir del ajuste de la parte no simétrica del espectro, que se muestra en trazo grueso.

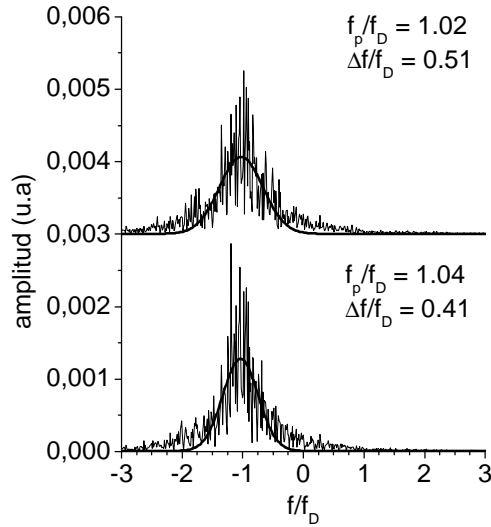


Figura 6.3. Espectros de amplitud compleja obtenidos con una anchura de haz normalizada  $w_0 / I_0 = 4$  y dos curvaturas diferentes de la capa de corte; curvatura alta ( $R_{plasma} / I_0 \approx 30$ , espectro superior) y plasma plano ( $R_{plasma} / I_0 = \infty$ , espectro inferior). La anchura espectral de la turbulencia es  $k_w / k_{\perp} = 1.04$ . La línea con trazo grueso representa la función gaussiana que ajusta la parte simétrica del espectro. Los parámetros del ajuste  $f_p / f_D$  y  $\Delta f / f_D$  aparecen especificados en cada uno de los espectros

Como puede observarse en la figura, el sistema resuelve correctamente los dos órdenes de difracción en la antena receptora y, como se observa en las gráficas, el orden cero de difracción prácticamente no contribuye al espectro. El efecto de la curvatura del plasma puede observarse en el deterioro que experimenta la resolución espectral del sistema: en el caso de un plasma plano, la resolución espectral es  $\Delta f / f_D \approx 0.4$ , mientras que en el caso de plasma con alta curvatura la resolución espectral es  $\Delta f / f_D \approx 0.5$ . En ambos casos, los valores obtenidos para  $f_p$  y por tanto, para la velocidad de rotación del plasma están en muy buen acuerdo con los valores teóricos esperados, con errores inferiores al 5%.

La figura 6.4 muestra los espectros obtenidos con un tamaño de spot superior  $w_0 / I_0 = 6.4$ , manteniendo el resto de los parámetros constantes.

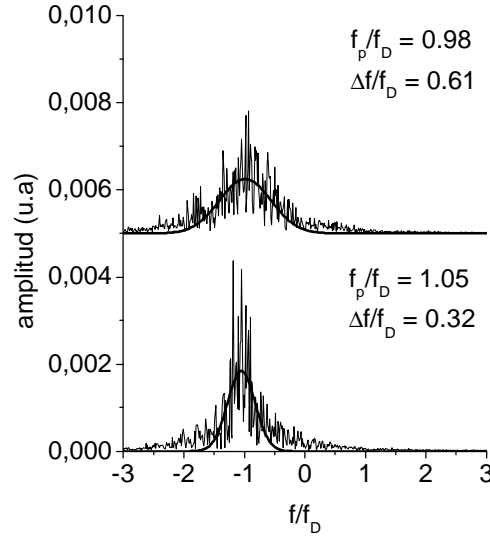


Figura 6.4. Espectros de amplitud compleja obtenidos con una anchura de haz normalizada  $w_0/I_0 = 6.4$  y dos curvaturas diferentes de la capa de corte; curvatura alta ( $R_{plasma}/I_0 \approx 30$ , espectro superior) y plasma plano ( $R_{plasma}/I_0 = \infty$ , espectro inferior). La anchura espectral de la turbulencia es  $k_w/k_\perp = 1.04$ . La línea con trazo grueso representa la función gaussiana que ajusta la parte no simétrica del espectro. Los parámetros del ajuste  $f_p/f_D$  y  $\Delta f/f_D$  aparecen especificados en cada uno de los espectros

Nuevamente, los valores obtenidos para la frecuencia Doppler están en buen acuerdo con los valores teóricos esperados con errores en torno al 5% en ambos casos. Sin embargo, la resolución espectral del sistema muestra un comportamiento distinto al considerar un plasma sin curvatura que al tener un plasma con curvatura alta. En el primer caso, la resolución espectral mejora al aumentar el tamaño del spot. Con una cintura de haz  $w_0/I_0 = 4$  su valor era  $\Delta f/f_D \approx 0.4$  mientras que ahora es  $\Delta f/f_D \approx 0.3$ . Sin embargo, en el segundo caso puede observarse que al incrementar el tamaño del spot el efecto de la curvatura del plasma es aún más apreciable ya que tiene un efecto perjudicial en la resolución espectral del sistema. En el caso de un haz gaussiano con una cintura de haz  $w_0/I_0 = 4$ , la resolución espectral era  $\Delta f/f_D \approx 0.5$ , sin embargo, su valor ahora es  $\Delta f/f_D \approx 0.6$ .

Para comparar los resultados numéricos con la dependencia de la resolución espectral del sistema con el tamaño de spot mostrada en la figura 6.1, se han realizado

simulaciones modificando la anchura del haz en un amplio rango de valores  $w_0/I_0 = 2.8-8$  en plasmas con curvatura alta y plasmas sin curvatura. En todas las simulaciones realizadas, la distancia de Rayleigh del haz varía entre 17 cm y 150 cm dependiendo del tamaño del spot considerado, mientras que la distancia entre la capa de corte del plasma y la posición de la cintura del haz se mantiene constante e igual a 6 cm aproximadamente. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.5.

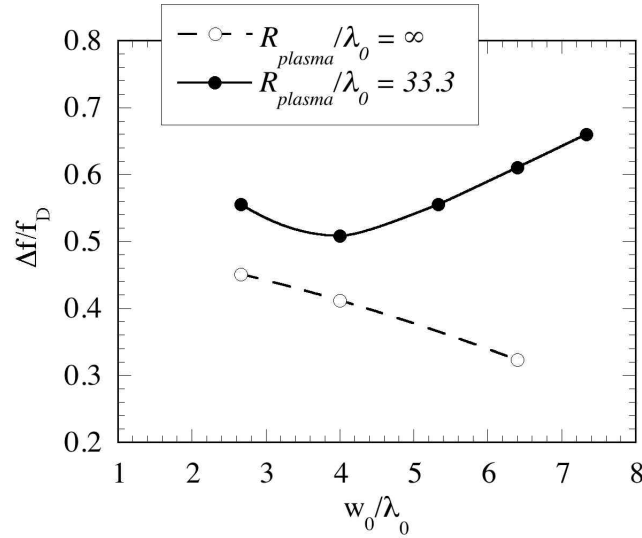


Figura 6.5. Resolución espectral de los espectros de amplitud compleja  $Ae^{if}$  obtenidos de la simulación, en función de la cintura del haz para plasmas con gran curvatura ( $R_{plasma}/I_0 = 33.3$ ) y plasmas planos ( $R_{plasma}/I_0 = \infty$ ). La anchura espectral de la turbulencia es  $k_w/k_{\perp} = 1.04$

En ella se muestra la resolución espectral de los espectros de amplitud compleja calculada a partir de los parámetros del ajuste,  $\Delta f/f_D$ , para las dos geometrías de plasma consideradas. En ambos casos, el cociente  $\Delta f/f_D$  sigue la tendencia de  $\Delta k/k_{\perp}$  que se muestra en la figura 6.1. Como se puede observar, en plasmas sin curvatura, el cociente  $\Delta f/f_D$  disminuye al aumentar el tamaño del spot, mientras que existe un tamaño de spot óptimo para el plasma con curvatura. Este tamaño de spot óptimo es, aproximadamente,  $w_0/I_0 \approx 4$  y es mayor que el estimado a partir de la figura 6.1 si no se tiene en cuenta la curvatura del frente de onda ( $w_0/I_0 \approx 2.5$ ). Sin embargo, cuando la curvatura del frente de onda se tiene en cuenta, los valores obtenidos a partir de la

figura 6.1 ( $w_0/I_0 \approx 3$ ) y el resultado obtenido de las simulaciones ( $w_0/I_0 \approx 4$ ) están más próximos.

Los resultados mostrados en la figura 6.5 confirman la tendencia de la resolución espectral con el tamaño de spot dada por la expresión (6.3). Además, en todos los casos mostrados en la figura 6.5, la frecuencia Doppler que se obtiene a partir del ajuste de los espectros coincide con la frecuencia Doppler teórica con un error máximo del 5%.

Las simulaciones también muestran que la amplitud del primer orden de difracción es mucho mayor que la del orden cero (ver figuras 6.3 ó 6.4). Esto se observa en todas las simulaciones realizadas con haces gaussianos. Se han realizado algunas pruebas para tratar de averiguar en qué condiciones domina uno u otro orden. Para ello, se ha modificado el nivel de la turbulencia en el plasma, el ángulo de inclinación de las antenas, y la anchura de la turbulencia sin llegar a una conclusión clara hasta la fecha.

En resumen, los resultados de esta sección muestran que las medidas reproducen con precisión los valores esperados para la frecuencia Doppler tanto en plasmas planos como en plasmas con curvatura si se emplean haces gaussianos. Estas simulaciones, realizadas con una anchura espectral de la turbulencia  $k_w/k_\perp = 1.04$ , muestran que las frecuencias Doppler estimadas a partir de los espectros obtenidos están en buen acuerdo con el desplazamiento Doppler teórico en todo el rango de valores de anchura de haz empleado  $w_0/I_0 = 2.8 - 8$  y por tanto, es posible determinar la velocidad de rotación perpendicular de las fluctuaciones de densidad con errores moderados. El empleo de haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo permite mejorar la resolución espectral de la medida. Haces con un tamaño de spot pequeño son adecuados en plasmas con gran curvatura (la resolución espectral es 0.5 para  $r/I_0 \approx 30$  y  $w_0/I_0 = 4$ ), mientras que haces gaussianos con un tamaño de spot grande lo son en el caso de plasmas planos.

### ***6.3.2. Efectos de la curvatura del frente de onda***

El efecto que la curvatura del frente de onda tiene en las medidas Doppler se ha estudiado comparando los resultados que se obtuvieron en el apartado anterior, donde se consideraban haces gaussianos, con los que se obtienen empleando haces emitidos al

plasma mediante una antena de microondas estándar de tipo piramidal. Estos haces tienen una divergencia alta y, por tanto, la curvatura del frente de onda es grande.

La antena empleada en las simulaciones emite al plasma un haz de microondas cuya anchura total de 3dB es aproximadamente igual a  $20^\circ$  y su diagrama de radiación corresponde al mostrado en la figura 3.10. La capa de corte del plasma se encuentra situada a unos 20 cm de la antena emisora y el tamaño del spot en dicha capa es 5 cm aproximadamente. La distancia de campo lejano para este tipo de antena es  $d = 2D^2 / \lambda_0 \approx 18$  cm, donde  $D = 2.6$  cm es la apertura de la antena.

En las simulaciones se consideran dos antenas idénticas a la descrita anteriormente, una emisora y otra receptora. El ángulo de inclinación de la bisectriz de las líneas de visión de las antenas, respecto a la perpendicular al plasma es  $18^\circ$  y, por tanto, el sistema de antenas selecciona preferentemente el mismo número de onda ( $k_\perp \approx 5.18 \text{ cm}^{-1}$ ) que se consideró en las simulaciones anteriores. La relación entre la anchura espectral de la turbulencia y el número de onda seleccionado por el reflectómetro es, nuevamente,  $k_w / k_\perp = 1.04$ .

La figura 6.6 muestra los espectros de la amplitud compleja de la señal recibida en la antena receptora cuando la onda se refleja en un plasma plano ( $R_{plasma} / \lambda_0 = \infty$ , espectro inferior) y en un plasma con curvatura alta ( $R_{plasma} / \lambda_0 = 33.3$  cm, espectro superior).

Como puede observarse en la figura, los espectros que se obtienen de la simulación empleando este tipo de antenas tienen una calidad notablemente inferior a los que se obtuvieron con antenas gaussianas (ver figuras 6.3 y 6.4).

El primer orden de difracción y el orden cero solapan claramente en el espectro al simular un plasma con curvatura alta y antenas estándar (espectro superior de la figura 6.6). En esta situación el procedimiento descrito en el apartado 6.3 para determinar la frecuencia Doppler del espectro y su anchura espectral no es adecuado. No obstante, suponiendo que la amplitud del espectro en torno al valor  $f = 0$  sea debida a la contribución del orden cero fundamentalmente, la resolución espectral que se obtiene a

partir del ajuste es  $\Delta f / f_D \approx 0.8$ . Este valor difiere sustancialmente del valor obtenido cuando se emplean haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo ( $\Delta f / f_D \approx 0.5$ ).

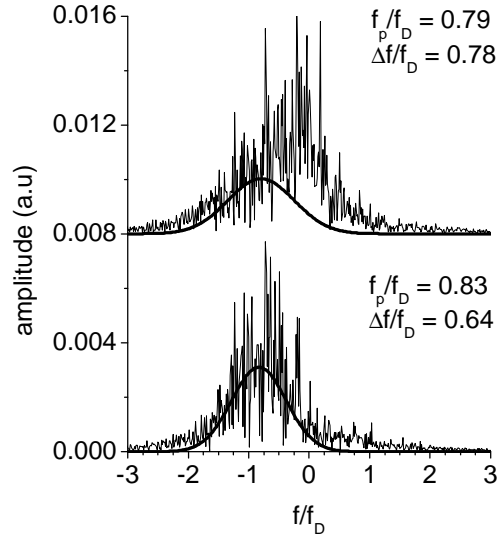


Figura 6.6. Espectros de amplitud compleja  $Ae^{if}$  de la señal recibida considerando antenas estándar para plasmas con gran curvatura ( $R_{plasma} / I_0 = 33.3$ , arriba) y plasma plano ( $R_{plasma} / I_0 = \infty$ , abajo). La anchura espectral de la turbulencia es  $k_w / k_{\perp} = 1.04$ . La función gaussiana que ajusta la parte no simétrica del espectro se muestra con trazo grueso y los parámetros del ajuste  $f_p / f_D$  y  $\Delta f / f_D$  aparecen especificados en cada uno de los espectros

Además, en este último caso se puede identificar claramente el desplazamiento Doppler del espectro con el primer orden de difracción. Sin embargo, cuando se consideran antenas estándar el deterioro de la resolución espectral del sistema y el solapamiento entre los dos órdenes de difracción en la antena receptora hace que la frecuencia Doppler estimada a partir del ajuste de la parte no simétrica del espectro sea inferior, en más de un 20%, a su correspondiente valor teórico. Es decir, la velocidad de rotación del plasma que se infiere a partir de la frecuencia Doppler difiere notablemente de su valor real.

En plasmas sin curvatura y utilizando antenas estándar (espectro inferior de la figura 6.6), los dos órdenes de difracción se separan mejor que en plasmas con curvatura y la resolución espectral del sistema es algo mejor ( $\Delta f / f_D \approx 0.6$ ). Sin embargo, la velocidad de rotación que se deduce a partir del desplazamiento Doppler del espectro sigue siendo inferior a su valor teórico en más de un 15%.

Esta discrepancia puede entenderse si tenemos en cuenta que, dentro del rango de números de onda seleccionados por el diagnóstico  $k_{\perp} \pm \Delta k$ , la amplitud de las fluctuaciones de densidad con números de onda más elevados y la asociada a fluctuaciones de densidad con números de onda más bajos puede ser muy diferente. En las simulaciones realizadas hasta ahora hemos considerado  $k_w/k_{\perp} = 1.04$ . Es decir, el reflectómetro selecciona números de onda que se encuentran en la zona del espectro donde la amplitud de la turbulencia cambia considerablemente. Cuando consideramos haces gaussianos, la resolución espectral es buena y el sistema selecciona fluctuaciones en un rango relativamente estrecho de números de onda. Sin embargo, cuando se emplean antenas estándar la resolución espectral del reflectómetro empeora considerablemente y por tanto, el rango de números de onda que contribuyen al espectro se amplía considerablemente. La forma particular del espectro de la turbulencia hace que la respuesta del diagnóstico a números de onda elevados sea inferior que la respuesta a los números de onda más bajos, ya que la amplitud de las fluctuaciones con números de onda elevados es inferior. Como consecuencia, la amplitud de la estructura Doppler disminuye en la región de altas frecuencias (en valor absoluto) y por tanto, la frecuencia Doppler se ve modificada.

Para estudiar este efecto, se ha incrementado la anchura espectral de la turbulencia desde su valor inicial  $k_w = 5.4 \text{ cm}^{-1}$  hasta un valor  $k_w = 10.0 \text{ cm}^{-1}$  manteniendo el mismo ángulo de inclinación de las antenas y, por tanto, el valor  $k_{\perp} = 5.18 \text{ cm}^{-1}$ . Con el nuevo valor de  $k_w$  el cociente entre la anchura espectral de la turbulencia y el número de onda seleccionado por el reflectómetro es  $k_w/k_{\perp} = 1.9$ . Ahora el sistema selecciona números de onda en la zona más plana del espectro y los cambios relativos de la amplitud de los números de onda seleccionados por el diagnóstico son menores. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.7.

Como puede observarse en la figura, la frecuencia Doppler se aproxima más a su valor teórico ya que pasa de un valor  $f_p/f_D = 0.83$  cuando la anchura espectral de la turbulencia es  $k_w/k_{\perp} = 1.04$  a un valor  $f_p/f_D = 0.91$  cuando la anchura espectral es  $k_w/k_{\perp} = 1.9$ .

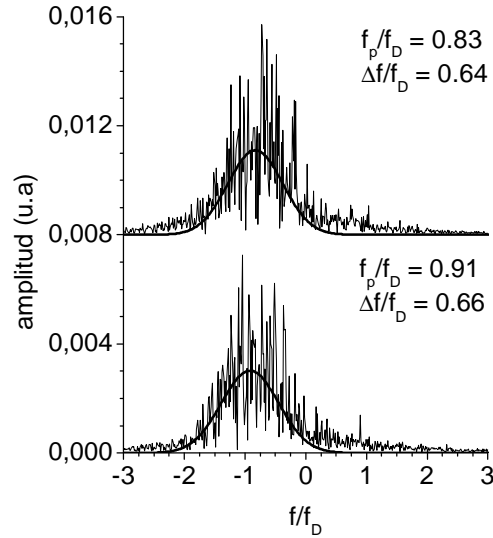


Figura 6.7. Espectros de amplitud compleja obtenidos usando antenas estándar de microondas con una anchura espectral de la turbulencia de  $k_w/k_\perp = 1.04$  (espectro superior) y  $k_w/k_\perp = 1.93$  (espectro inferior), para un plasma plano. La función gaussiana que ajusta la parte no simétrica del espectro se muestra con trazo grueso y los parámetros del ajuste  $f_p/f_D$  y  $\Delta f/f_D$  aparecen especificados

Los resultados presentados en esta sección nos indican que incluso en el caso de tener plasmas con una curvatura muy pequeña, el sistema de antenas tiene que estar optimizado para minimizar el error en la determinación de la velocidad perpendicular de las fluctuaciones de densidad.

Las antenas de microondas estándar permiten la separación del orden cero y el primer orden de difracción en plasmas sin curvatura, pero el error en los valores de la velocidad de rotación puede ser elevado (superior al 10%) si la amplitud de la turbulencia cambia dentro del rango de números de onda seleccionados por el reflectómetro.

En la siguiente sección se discute más en detalle el efecto que la anchura espectral de las fluctuaciones de densidad tiene en las medidas Doppler.

### 6.3.3. Efecto de la anchura espectral de la turbulencia

Como se mostró en el apartado anterior, los cambios en la amplitud de la turbulencia dentro del rango de números de onda seleccionados por el diagnóstico influyen en las medidas Doppler y pueden llegar a ocasionar errores considerables en la determinación de la velocidad de rotación del plasma si el sistema no está optimizado. En el apartado 6.1.3 de este capítulo se comentó que este fenómeno ya había sido estudiado en [19] utilizando un código que, de forma aproximada, permite calcular en dos dimensiones la propagación de ondas en plasmas magnetizados con fluctuaciones de densidad. Sin embargo, no existen estudios similares utilizando códigos de onda completa. En este apartado mostraremos los resultados obtenidos con el código de onda completa desarrollado en este trabajo.

El parámetro relevante para realizar el estudio es la relación entre la anchura espectral de la turbulencia y el número de onda seleccionado por el diagnóstico  $k_w/k_\perp$ . Si la anchura espectral de las fluctuaciones de densidad verifica que  $k_w/k_\perp > 1$  entonces el rango de números de onda seleccionados por el diagnóstico  $k_\perp \pm \Delta k$  se encontrará dentro de la zona más plana del espectro de las fluctuaciones, es decir, la amplitud de los números de onda seleccionados por el reflectómetro será bastante similar. Sin embargo, si la anchura espectral de la turbulencia verifica que  $k_w/k_\perp < 1$  entonces, la amplitud relativa de los diferentes números de onda será diferente. En nuestro estudio hemos modificado el valor de la anchura espectral de la turbulencia en el rango de valores  $k_w = 1.4 - 10.5 \text{ cm}^{-1}$  manteniendo constante el ángulo de inclinación de las antenas en un valor  $q_0 = 18^\circ$ ; además en dos casos el valor de dicho ángulo se incrementa a un valor  $q_0 = 30^\circ$ . De esta forma, el cociente  $k_w/k_\perp$  varía en el rango de valores  $k_w/k_\perp \approx 0.3 - 2$ . Además, se consideran dos situaciones diferentes: un plasma sin curvatura con antenas estándar y un plasma con una curvatura alta y antenas gaussianas con un tamaño del haz óptimo ( $w_0/I_0 = 4$ ). Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.8.

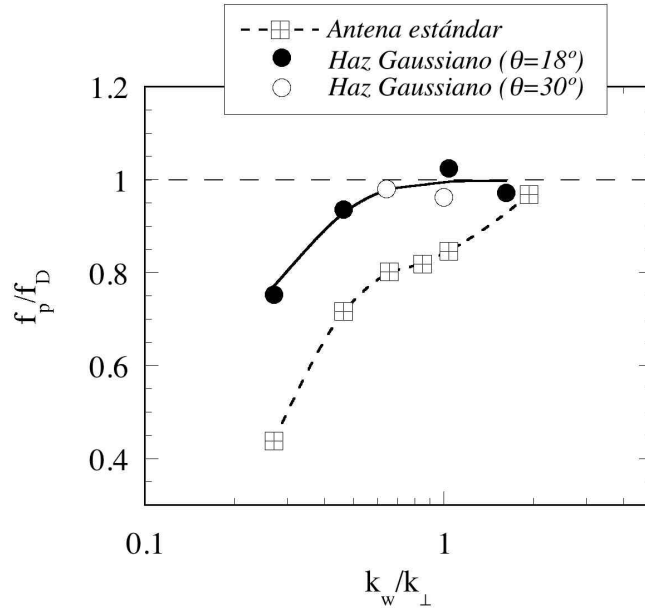


Figura 6.8. Frecuencia de la estructura Doppler de los espectros de fase compleja ( $e^{if}$ ) normalizadas con el desplazamiento Doppler dado por la fórmula de Bragg,  $f_p/f_D$ , en función de la anchura espectral de la turbulencia normalizada con el número de onda seleccionado  $k_w/k_{\perp}$ . La figura incluye los datos obtenidos usando antenas estándar en un plasma plano y  $\mathbf{q} = 18^\circ$  (cuadrados) y haces gaussianos con tamaño de spot óptimo en un plasma con alta curvatura con  $\mathbf{q} = 18^\circ$  (círculos negros) y  $\mathbf{q} = 30^\circ$  (círculos blancos)

En la figura se muestra la frecuencia de la estructura Doppler que se obtiene a partir del ajuste de los espectros de fase compleja  $e^{if}$  de la señal recibida en la antena receptora. Los valores obtenidos a partir de los espectros de amplitud compleja son muy similares a los que se muestran aquí. Como puede observarse en la figura, en el caso de emplear antenas estándar con un plasma sin curvatura (cuadrados), la frecuencia Doppler obtenida está de acuerdo con el valor teórico sólo cuando el cociente  $k_w/k_{\perp} > 1$ . Es decir, cuando el reflectómetro selecciona números de onda en la parte más plana del espectro. Sin embargo, a medida que la anchura espectral se reduce la frecuencia Doppler obtenida difiere considerablemente de los valores teóricos. El error en la estimación de la frecuencia Doppler alcanza el 20% cuando el cociente  $k_w/k_{\perp}$  se encuentra en el rango 0.6-1 y se incrementa aún más para valores de  $k_w/k_{\perp}$  inferiores. Sin embargo, en las señales obtenidas empleando haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo ( $w_0/I_0 \approx 4$ ) y un plasma con una curvatura alta ( $R_{plasma}/I_0 \approx 30$ ) la frecuencia Doppler está en buen acuerdo con el valor teórico esperado en un rango más

amplio de anchuras espectrales. Como muestra la figura (círculos), los errores son inferiores al 5% si el cociente entre la anchura espectral y el número de onda seleccionado por el reflectómetro verifica  $k_w / k_{\perp} > 0.6$ . Puede observarse que el error es grande sólo si el número de onda seleccionado por el diagnóstico es muy grande y/o la anchura espectral es demasiado estrecha, es decir, cuando se cumple que  $k_w / k_{\perp} < 0.5$ . Las simulaciones obtenidas con haces gaussianos y plasmas planos dan resultados muy parecidos.

Resumiendo, los resultados presentados en esta sección muestran que si el diagnóstico selecciona números de onda situados en la zona más plana del espectro, el reflectómetro dará buenos resultados, incluso si su resolución espectral no es la óptima. Sin embargo, si la amplitud del espectro cambia en el rango de números de onda seleccionado por el diagnóstico,  $k_w / k_{\perp} \approx 0.6-1$ , es necesario mejorar la resolución espectral para conseguir resultados correctos de velocidad de rotación del plasma. Los resultados con mayor precisión se alcanzan cuando se emplean haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo.

#### **6.3.4. Caracterización de números de onda altos**

Como hemos visto en el apartado anterior, las simulaciones realizadas muestran que, bajo las condiciones adecuadas, la frecuencia Doppler que se obtiene a partir de los espectros se encuentra muy próxima a su valor teórico independientemente del ángulo de inclinación de las antenas. La figura 6.8 muestra que, incluso para un ángulo de inclinación tan elevado como  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ , el sistema es capaz de medir correctamente la velocidad de rotación del plasma si se emplea un sistema de antenas optimizadas. Además, la expresión (6.3) predice que la resolución espectral del sistema mejora si se incrementa el ángulo de inclinación de las antenas ( $\Delta k / k_{\perp} \propto (\sin \mathbf{q})^{-1}$ ) y, por tanto, cabe preguntarse sobre la posibilidad de emplear la técnica de la reflectometría Doppler para medir el espectro en números de onda de las fluctuaciones de densidad en la región de números de onda elevados.

Las simulaciones realizadas con el código de onda completa confirman que la resolución espectral del sistema mejora al incrementar el ángulo de inclinación de las

antenas. La figura 6.9 muestra los espectros de la amplitud compleja de la señal recibida en la antena receptora que se obtienen cuando se considera un plasma con una curvatura alta y se emplea un haz gaussiano con un tamaño de spot óptimo que incide con un ángulo  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  (a) y  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$  (b). La relación entre la anchura espectral de la turbulencia y el número de onda seleccionado por el diagnóstico es la misma en ambos casos  $k_w/k_\perp \approx 1$ .

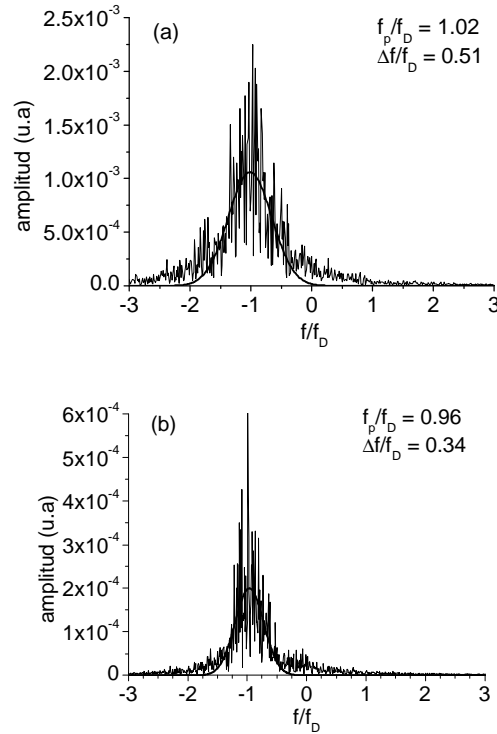


Figura 6.9. Espectros de amplitud compleja obtenidos empleando haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo ( $w_0 / \mathbf{l}_0 = 4$ ) y un plasma con una curvatura alta ( $R_{plasma} / \mathbf{l}_0 \approx 30$ ) para dos ángulos de inclinación diferentes:  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  en la gráfica (a) y  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$  en la gráfica (b). La anchura espectral de la turbulencia se modifica para tener  $k_w / k_\perp \approx 1.0$  en ambos casos. La función gaussiana que ajusta la parte no simétrica del espectro se muestra con trazo grueso y los parámetros del ajuste  $f_p / f_D$  y  $\Delta f / f_D$  aparecen especificados

Como puede observarse en la figura, la resolución espectral del sistema es  $\Delta f / f_D \approx 0.5$  cuando el ángulo de inclinación de las antenas es  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  y mejora hasta alcanzar un valor  $\Delta f / f_D \approx 0.3$  cuando el ángulo de inclinación se incrementa a un valor  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ .

Sin embargo, aunque la resolución del sistema mejora al incrementar el ángulo de inclinación de las antenas, las simulaciones realizadas también muestran que la eficiencia del proceso de dispersión de Bragg, estimada como la amplitud del primer orden de difracción, depende del ángulo de inclinación de la antena, es decir, del número de onda seleccionado por el diagnóstico. Esto constituye una dificultad importante en la interpretación de los resultados ya que el espectro de las fluctuaciones de densidad que se obtendría a partir de las medidas experimentales podría ser muy diferente al espectro real de las fluctuaciones de densidad del plasma.

La figura 6.10 muestra la amplitud de la estructura Doppler en función del parámetro adimensional  $k_w/k_\perp$  cuando se considera un haz gaussiano con un tamaño de spot óptimo en la capa de corte y con dos ángulos de inclinación diferentes  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$  y  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ . En ambos casos se considera un plasma con una curvatura alta.

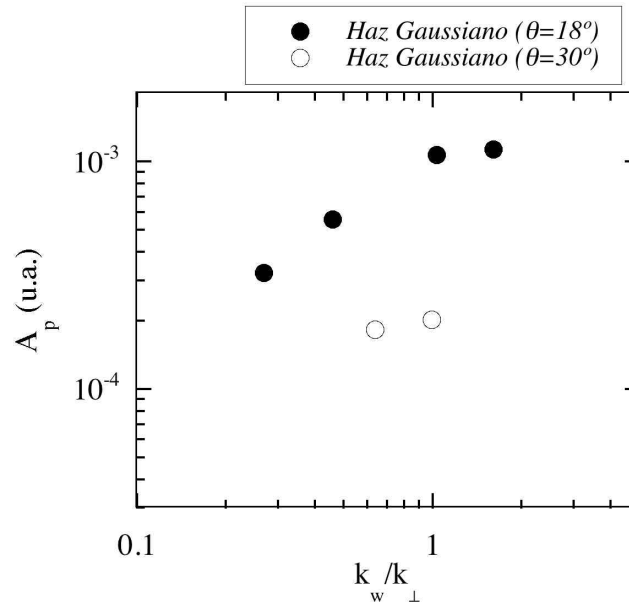


Figura 6.10. Amplitud de la estructura Doppler en función de  $k_w/k_\perp$  para haces gaussianos con tamaño de spot óptimo en un plasma con alta curvatura y  $\mathbf{q} = 18^\circ$  (círculos negros) y  $\mathbf{q} = 30^\circ$  (círculos blancos)

Como se observa en la figura, si mantenemos constante el ángulo de inclinación de las antenas en un valor  $\mathbf{q}_0 = 18^\circ$ , la amplitud de la estructura Doppler decrece cuando el cociente  $k_w/k_\perp$  decrece. Este es un resultado esperado ya que, en esta situación, el número de onda seleccionado por el diagnóstico es mayor que la anchura espectral de la

turbulencia y las fluctuaciones asociadas a este número de onda tienen menor amplitud. En consecuencia, la amplitud del espectro que se obtiene también se reduce.

Los resultados también muestran que la amplitud de la estructura Doppler también depende del ángulo de inclinación y no sólo de la forma del espectro de las fluctuaciones de densidad. Manteniendo constante el cociente  $k_w/k_\perp$  (es decir, la amplitud de las fluctuaciones asociadas al número de onda  $k_\perp$ ) pero modificando el ángulo de inclinación de las antenas, es decir, modificando el número de onda seleccionado por el reflectómetro, la amplitud de la estructura Doppler cambia. En la figura puede observarse que manteniendo constante el cociente  $k_w/k_\perp$  en un valor próximo a uno, la amplitud de la estructura Doppler decrece en un factor superior a cinco cuando el ángulo de inclinación de las antenas cambia de  $18^\circ$  a  $30^\circ$ , es decir, cuando el número de onda seleccionado  $k_\perp/k_0$  cambia de 0.6 a 1.

A partir de las simulaciones realizadas podemos concluir que, aunque la técnica Doppler es capaz de suministrar valores precisos de la velocidad de rotación del plasma con ángulos elevados (altos números de onda de la turbulencia), la amplitud de la estructura Doppler decrece al aumentar el ángulo de inclinación. Este resultado pone en cuestión la precisión en las medidas de espectros de números de onda obtenidos con reflectometría Doppler, como los obtenidos en el tokamak Tore Supra [48]. Si bien, para cuantificar la reducción en la eficiencia al seleccionar números de onda elevados y poder determinar hasta qué punto dicha reducción puede dificultar o incluso imposibilitar la medida del espectro, es necesario un estudio sistemático modificando la amplitud de las fluctuaciones.

### ***6.3.5. Amplitud del campo eléctrico en las proximidades de la capa de corte***

En la reflectometría convencional ( $q_0 = 0^\circ$ ) la amplitud del campo eléctrico asociado a la onda aumenta notablemente en las proximidades de la capa de corte del plasma. Esto se debe a la interferencia constructiva que existe entre la onda incidente en el plasma y la onda reflejada por el mismo. Además, dicho incremento se produce en una región del plasma que tiene una extensión radial muy pequeña, típicamente una o dos longitudes de onda. Este aumento del campo eléctrico en una región tan pequeña contribuye a la resolución espacial de las medidas experimentales.

Como se vio en el capítulo dedicado a los fundamentos de la reflectometría, si el ángulo de inclinación de las antenas es diferente de  $\mathbf{q}_0 = 0^\circ$ , entonces la posición radial de la capa de corte del plasma se ve modificada. Su posición depende del ángulo de inclinación de las antenas y viene dada por  $\mathbf{h} = \sin \mathbf{q}_0$ . En esta capa, el campo eléctrico de la onda también se incrementa como en el caso de la reflectometría convencional y dicho aumento puede ser diferente en función de las condiciones del plasma [7].

El código de onda completa se ha empleado para estudiar el comportamiento de la amplitud del campo eléctrico de la onda en las proximidades de la capa de corte para dos ángulos de inclinación diferentes. Por un lado, se considera un ángulo de inclinación igual a  $\mathbf{q}_0 = 0^\circ$  y por otro lado, se considera un ángulo de inclinación  $\mathbf{q}_0 \neq 0^\circ$ , típico de la reflectometría Doppler. En particular, hemos considerado un ángulo de inclinación elevado,  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ , para comprobar si el incremento en la amplitud del campo eléctrico y por tanto, su contribución a la localización espacial de la medida se modifica considerablemente dependiendo del ángulo de inclinación de las antenas. Para ello, hemos considerado una antena de microondas estándar como la empleada anteriormente, situada a una distancia de 15 cm aproximadamente del borde del plasma. La curvatura de la capa de corte es nula (plasma plano) y no se han considerado fluctuaciones de densidad para este estudio.

Como se ha dicho anteriormente, el incremento de la amplitud del campo eléctrico depende de las condiciones del plasma y, especialmente, depende del valor del gradiente de densidad en la capa de corte [7]. Por ello, hemos considerado dos perfiles radiales de densidad diferentes, uno con una longitud característica  $L_n$  del gradiente de densidad ( $L_n^{-1} = \nabla n_e / n_e$ ) en la posición de la capa de corte igual a  $L_n / \mathbf{l}_0 = 4$  y otro con una longitud característica inferior  $L_n / \mathbf{l}_0 = 2.3$ .

La figura 6.11 muestra la variación espacial de la intensidad del campo eléctrico en función de la coordenada X de la trayectoria del haz para los ángulos de inclinación  $\mathbf{q}_0 = 0^\circ$  y  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ . En el caso de incidencia perpendicular a la superficie del plasma ( $\mathbf{q}_0 = 0^\circ$ ), dicha trayectoria coincide con el eje X de la figura, sin embargo, cuando el

ángulo de incidencia es  $\mathbf{q}_0 = 30^\circ$ , la trayectoria del haz depende del índice de refracción de la onda en el plasma. En este caso, los resultados se representan en función de la coordenada X de la trayectoria. La figura también muestra la variación espacial del índice de refracción  $\mathbf{h}$  de la onda cuando  $\mathbf{q}_0 = 0^\circ$ .

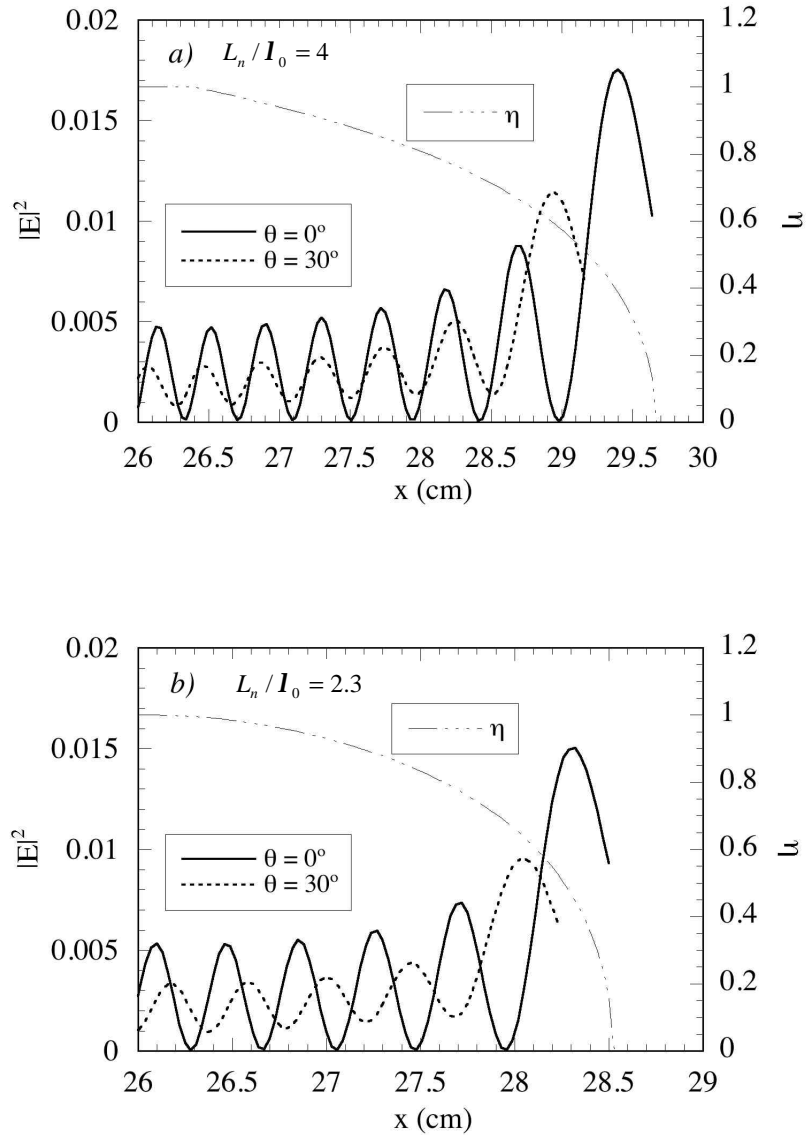


Figura 6.11. Amplitud del campo eléctrico de la onda incidente e índice de refracción  $\mathbf{h}$  para dos ángulos de inclinación de la antena  $\mathbf{q} = 0^\circ$  y  $\mathbf{q} = 30^\circ$  con longitudes características del gradiente de densidad  $L_n/I_0 = 4$  (a) y  $L_n/I_0 = 2.3$  (b)

Como puede observarse en la figura, la amplitud del campo eléctrico de la onda aumenta notablemente en las proximidades de la capa de corte en todos los casos mostrados. Si comparamos los resultados obtenidos para  $L_n/I_0 = 4$  (a) y  $L_n/I_0 = 2.3$  (b) cuando el ángulo de inclinación es  $q_0 = 0^\circ$ , podemos observar que la amplitud del campo eléctrico en el último máximo inmediatamente antes del corte es superior en el caso con  $L_n/I_0 = 4$  que en el caso con  $L_n/I_0 = 2.3$ . Sin embargo, la amplitud del campo en la zona más externa del plasma es parecida en ambos casos. Es decir, el factor de aumento en la intensidad del campo eléctrico, definido como el cociente entre la intensidad de campo en el último máximo inmediatamente antes del corte y su valor en el borde del plasma, es mayor en el caso con un gradiente de densidad menor en la capa de corte. A partir de la gráfica podemos ver que su valor es cuatro aproximadamente mientras que en el caso con  $L_n/I_0 = 2.3$  es tres aproximadamente.

Los resultados obtenidos cuando el ángulo de inclinación es  $q_0 = 30^\circ$  muestran cualitativamente el mismo comportamiento que los correspondientes a  $q_0 = 0^\circ$ . No obstante, puede observarse que, como consecuencia del ángulo de inclinación no nulo de la antena, la interferencia que se produce entre la onda incidente y la reflejada no es totalmente destructiva (amplitud nula del campo) como lo era en algunas zonas del plasma con  $q_0 = 0^\circ$ . Esto se debe a que la trayectoria de la onda reflejada no es la misma que la onda incidente y sus amplitudes son diferentes.

Sin embargo, para un perfil de densidad concreto el factor de aumento del campo eléctrico permanece prácticamente constante independientemente del ángulo de inclinación de las antenas. Por ejemplo, si  $L_n/I_0 = 4$  dicho factor es aproximadamente cuatro tanto para un ángulo de inclinación  $q_0 = 0^\circ$  como para un ángulo tan elevado como  $q_0 = 30^\circ$ . Es decir, la contribución del aumento del campo eléctrico a la localización espacial de las medidas permanece constante independientemente del ángulo de inclinación de las antenas. Por lo tanto, la reflectometría Doppler podría suministrar información de la turbulencia con números de onda elevados manteniendo una buena resolución espacial. Sin embargo, como se comentó anteriormente se necesitan más estudios para determinar la eficiencia del proceso de dispersión de Bragg cuando el ángulo de inclinación es elevado.

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un código de onda completa en dos dimensiones que permite simular la propagación de ondas electromagnéticas en modo extraordinario en plasmas magnetizados con fluctuaciones de densidad. Este código permite reproducir fielmente las condiciones experimentales y se ha utilizado para estudiar una serie de aspectos relevantes en reflectometría de microondas.

El código de onda completa se ha empleado para estudiar la asimetría que aparece en las ecuaciones que describen el modo extraordinario de propagación con incidencia oblicua en plasmas magnetizados e inhomogéneos. Esta asimetría no ha sido estudiada anteriormente quizás porque no es importante en reflectometría convencional (incidencia normal), sin embargo, podría afectar a las medidas realizadas con reflectometría Doppler. Los resultados muestran un claro efecto de la asimetría en los plasmas generados en dispositivos pequeños en los que la separación radial entre la capa de corte y la capa de resonancia es pequeña. Sin embargo, en plasmas como los generados en máquinas de fusión tipo tokamak o stellarator, los resultados muestran que el efecto de la asimetría en las medidas Doppler es despreciable. Los espectros obtenidos en las simulaciones y la potencia reflejada por el plasma son prácticamente independientes de la polaridad del campo magnético del dispositivo.

El reflectómetro heterodino de banda ancha instalado en el stellarator TJ-II ha permitido medir cambios en el sentido de la velocidad de propagación perpendicular de las fluctuaciones de densidad. Los resultados obtenidos muestran una inversión en la velocidad de rotación del plasma en una zona cercana a la última superficie magnética cerrada cuando la densidad media supera un cierto valor crítico. Además, el reflectómetro ha permitido caracterizar una segunda capa con cizalladura en la velocidad de rotación que se encuentra en zonas más internas del plasma y cuya posición radial varía en función de la densidad media del plasma.

Estos resultados experimentales se han reproducido numéricamente utilizando el código de onda completa, lo que ha permitido una correcta interpretación de los mismos. Los resultados numéricos corroboran la capacidad del reflectómetro para caracterizar capas

con cizalladura en la velocidad perpendicular de rotación con una resolución espacial buena.

El código de onda completa se ha empleado para estudiar la capacidad de la reflectometría Doppler para medir la velocidad de rotación de las fluctuaciones de densidad. Hasta la fecha este tipo de estudios sólo se había abordado utilizando códigos simplificados que no siempre reproducen las condiciones experimentales.

Se han estudiado los efectos debidos a la curvatura de la capa de corte y a la del frente de onda. Los resultados obtenidos en las simulaciones muestran que es posible obtener valores precisos de la velocidad de rotación de las fluctuaciones no sólo en plasmas planos sino también en plasmas con curvatura alta si se emplean haces gaussianos con un tamaño de spot óptimo. Los resultados confirman la dependencia dada por el expresión (6.2). Las simulaciones indican que haces gaussianos con un tamaño de spot relativamente pequeño son adecuados en plasmas con curvatura alta, mientras que haces gaussianos con un tamaño de spot grande son recomendables en plasmas sin curvatura. No obstante, dependiendo del dispositivo experimental la curvatura de la capa de corte puede cambiar en un amplio rango de valores en función de la posición radial. En estos casos, haces relativamente estrechos darán una resolución espectral buena incluso en zonas con una curvatura pequeña, mientras que haces anchos son inapropiados en zonas cuya curvatura es alta.

Por otro lado, las simulaciones indican que la resolución espectral del sistema es mala si se emplean haces con una divergencia alta y, por tanto, éstos deben de evitarse incluso en plasmas sin curvatura.

También se ha estudiado el efecto de la anchura espectral de la turbulencia en las medidas Doppler. Los resultados muestran que si se emplean haces con una divergencia alta, los errores en la velocidad de rotación son grandes (superiores al 20%) si la amplitud de la turbulencia cambia en el rango de números de onda seleccionados por el reflectómetro. Sin embargo, si se emplean haces gaussianos la resolución espectral del sistema mejora y el error en la determinación de la velocidad de rotación es pequeño para un amplio rango de valores de la anchura espectral de la turbulencia. Los errores son considerables sólo si la anchura espectral de la turbulencia es muy estrecha.

Las medidas Doppler con ángulos de inclinación elevados, es decir, seleccionando números de onda de la turbulencia altos, dan resultados correctos de la frecuencia Doppler y, por tanto, de la velocidad de rotación de las fluctuaciones de densidad. Además, el aumento en la amplitud del campo eléctrico en las proximidades de la capa de corte y, por tanto, su contribución a la localización espacial de la medida es prácticamente independiente del ángulo de inclinación de las antenas. Sin embargo, la eficiencia del proceso de dispersión de Bragg depende del ángulo de inclinación, es decir, del número de onda seleccionado por el diagnóstico. Este hecho pone en cuestión la precisión en la medida del espectro de números de onda de la turbulencia empleando la reflectometría Doppler.



## REFERENCIAS

- [1] J.D. Lawson “Some Criteria for a Power Producing Termonuclear Reactor”. Proceedings of the Physical Society **B 70** (1957) 6-10
- [2] I. H. Hutchinson. “Principles of plasma diagnostics”. Cambridge University Press. Second edition (2002).
- [3] C. Laviron, A. J. H. Donné, M. E. Manso, J. Sánchez. Plasma Phys. Control. Fusion **38** (1996) 905-936
- [4] E. Holzhauser, M. Hirsch, T. Grossman, B. Brañas and F. Serra. Plasma Phys. Control. Fusion **40** (1998) 1869
- [5] M. Hirsch, E. Holzhauser, J. Baldzuhn and B. Kurzan. “*Doppler reflectometry for the investigation of poloidally propagating density perturbations*”. Proc 4<sup>th</sup> Reflectometry Workshop (Cadarahe 1999) EUR-CEA-FC-1674
- [6] X. L. Zou, T. F. Seak, M. Paume, et. al. “*Poloidal rotation measurements in Tore Supra by oblique reflectometry*”. Proc 4<sup>th</sup> Reflectometry Workshop (Cadarahe 1999) EUR-CEA-FC-1674
- [7] R. B. White, F. F. Chen. Plasma. Physics **16** (1974) 565.
- [8] T. H. Stix, “*Waves in plasmas*”. American Institute of physics 1992
- [9] V. L. Ginzburg, “*Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas*”. Pergamon, Oxford (1970)
- [10] G. Tyras. “*Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves*” (Academic Press, New York, 1969)
- [11] N. Bretz. Phys. Fluid **B 4** (8) 2414 (1992)
- [12] I. H. Hutchinson, Plasma Phys. Control. Fusion, **34** (1992) 1225.
- [13] E. Mazzucato, R. Nazikian. Plasma Phys. Control. Fusion **33** (1991) 261
- [14] X.L. Zou, L. Laurent and J. M. Rax. Plasma Phys. Control. Fusion **33** (1991) 903
- [15] E. Mazzucato, R. Nazikian. Plasma Phys. Control. Fusion **33** (1991) 261
- [16] L. G. Bruskin, A. Mase, T. Tamano. Plasma Phys. Control. Fusion **37** (1995) 255
- [17] V. Zhuravlev, J. Sánchez and E. de la Luna. Plasma Phys. Control. Fusion **38** (1996) 2231
- [18] T. Estrada, J. Sánchez, V. Zhuravlev, E. de la Luna and B. Brañas. Physics of Plasmas **8** (2001) 2657
- [19] G. D. Conway. Plasma Phys. Control. Fusion **41** (1999) 65

- [20] T. Estrada. “*Estudios de turbulencia en el stellarator W7-AS mediante reflectometría de microondas con detección heterodina de banda ancha*”. Tesis doctoral. Universidad de Cantabria (1993).
- [21] M. Hirsch, E. Holzhauer, J. Baldzuhn, B. Kurzan and B. Scott. Plasma Phys. Control. Fusion **43** (2001) 1641
- [22] J. H. Irby, S. Horne, I. H. Hutchinson, P. C. Stek. Plasma Phys. Control. Fusion **35** (1993) 601
- [23] E. Blanco, S. Heuraux, T. Estrada, J. Sánchez and L. Cupido. Rev. Sci. Instrum. **75** (2004) 3822
- [24] E. Holzhauer. Comunicación privada.
- [25] B. I. Cohen, T. B. Kaiser, and J. C. Garrison. Rev. Sci. Instrum. **68** (1997) 68
- [26] E. J. Valeo, G. J. Kramer and R. Nazikian. Plasma Phys. Control. Fusion **44** (2002) L1-L10
- [27] A. Taflove, S. C. Hagness. “*Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*”, Artec House (2000).
- [28] K. Yee, IEEE Transactions on Antenas and Propagation, vol. **AP-14**, pp. 302-307 (1966).
- [29] B. Engquist and A. Majda. Math. Comput. **31** (1977) 629
- [30] R. L. Higdon. Journal of Computational Physics **101** (1992) 386
- [31] J. G. Blaschak, G. A. Kriegsmann. Journal of Computational Physics **77** (1988) 109
- [32] D. Givoli. Journal of Computational Physics **94** (1991) 1
- [33] J. P. Berenger, Journal of Computational Physics **114** (1994) 185
- [34] S. Hacquin, S. Heuraux, F. Silva, et al. Proc. 29<sup>th</sup> EPS Conf. Controlled fusion and plasma physics. Montreux ECA Vol. 26B P5.094
- [35] E. Holzhauer, and E. Blanco. “*A note on asymmetry effects in x-mode reflectometry*”. Nucl. Fusion **46** (2006). In press.
- [36] C. M. Franck, O. Grulke and T. Kilnger. Phys. Plasmas **10** (2003) 323
- [37] C. Alejaldre et al. Plasma Phys. Control. Fusion. **41** (1999) A539
- [38] E. Holzhauer, and E. Blanco. Proc. 7th International Reflectometry Workshop for fusion plasma diagnostics - IRW7 (Garching, May 2005), IPP Report 2/9, p 45
- [39] L. Cupido, J. Sánchez and T. Estrada. Rev. Sci. Instrum **75** (2004) 3865
- [40] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa, L. García, A. Ware. Physical Review **E 70** (2004) 067402

- [41] M. A. Pedrosa, C. Hidalgo, E. Calderón, T. Estrada et al. Plasma Phys. Control. Fusion **47** (2005) 777
- [42] T. Estrada, E. Blanco, L. Cupido, M. E. Manso and J. Sánchez. “*Velocity shear layer measurements by reflectometry in TJ-II plasmas*”. Nucl. Fusion **46** (2006). In press.
- [43] J. A. Alonso, S. J. Zweben, H. Thomson et al. 32<sup>nd</sup> EPS Conference on Plasma Physics (Tarragona 2005), ECA Vol. **29C**, P-5.027
- [44] A. Melnikov, C. Hidalgo, A. A. Chmyga, et al. Fusion Science and Technology **46** (2004) 299
- [45] A.V. Melnikov, A. Alonso, E. Ascasibar, et al. “*Plasma potential evolution study by HIBP diagnostic during NBI experiments in the TJ-II Stellarator*”. Enviado para su publicación en Fusion Science and Technology (2006).
- [46] V. Tribaldos. Phys. Plasmas **8** (2001) 1229
- [47] G. D. Conway, J. Schirmer, S. Klenge, et al. Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004) 951
- [48] P. Hennequin, C. Honore, A. Truc, et al. Proc. 7th International Reflectometry Workshop for fusion plasma diagnostics - IRW7 (Garching, May 2005), IPP Report 2/9, p 74
- [49] M. Hirsch and E. Holzhauser. Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004) 593-609
- [50] V. V. Bulanin, A. V. Petrov and M. V. Yefanov. Proc. 7th International Reflectometry Workshop for fusion plasma diagnostics - IRW7 (Garching, May 2005), IPP Report 2/9, p 58
- [51] E. Z. Gusakov and A. V. Surkov. Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004) 1143
- [52] E. Z. Gusakov, A. V. Surkov and A. Popov. Plasma Phys. Control. Fusion **47** (2005) 959
- [53] E. Z. Gusakov, S. Heurax, F. da Silva and A. V. Surkov. Proc. 7th International Reflectometry Workshop for fusion plasma diagnostics - IRW7 (Garching, May 2005), IPP Report 2/9, p 62
- [54] J. A. Ogilvy (1991) “*Theory of wave scattering from random rough surfaces*”. Adam Hilger
- [55] E. Blanco, T. Estrada and J. Sánchez. “*Doppler reflectometry studies using a two-dimensional full-wave code*”. Plasma Phys. Control. Fusion **48** (2006). In press.
- [56] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa, J. Castellano et al. Plasma Phys. Control. Fusion **43** (2001) A313-A321



## PUBLICACIONES DEL AUTOR

E. Ascasíbar, C. Alejaldre, J. Alonso, L. Almoguera, A. Baciero, R. Balbín, **E. Blanco**, et al.

*“Confinement and Stability on the TJ-II Stellarator”*

Plasma Phys. Control. Fusion **44** (2002) B307-B322

C. Alejaldre, J. Alonso, L. Almoguera, F. de Aragón, E. Ascasíbar, A. Baciero, R. Balbín, **E. Blanco**, et al.

*“Magnetic configuration and transport interplay in TJ-II flexible heliac”*

19<sup>th</sup> IAEA Conf. Fusion Energy, Lyon (France), IAEA-CN-94/OV/4-4 (2002)

C. Alejaldre, J. Alonso, L. Almoguera, F. De Aragón, E. Ascasíbar, A. Baciero, R. Balbín, **E. Blanco**, et al.

*“Overview of TJ-II Experiments”*

Proc. 14th IAEA International Workshop on Stellarators, Greifswald (2003)

T. Estrada, **E. Blanco**, J. Sánchez and the TJ-II team

*“Density profile characterization in the stellarator TJ-II”*

Proc. 6th International Reflectometry Workshop, San Diego (2003)

L. Cupido, J. Sánchez, T. Estrada, L. Meneses, **E. Blanco**, M.E Manso, F. Serra.

*“Frequency hopping millimeter wave reflectometer”*

15<sup>th</sup> Topical Conference on High Temperature Plasma Diagnostic, San Diego (2004)

**E. Blanco**, S. Heurax, T. Estrada, J. Sánchez and L. Cupido.

*“2D full-wave code for reflectometry simulations in TJ-II”*

15<sup>th</sup> Topical Conference on High Temperature Plasma Diagnostic, San Diego (2004)

M. Liniers, C. Alejaldre, J. Alonso, M. A. Acedo, L. Almoguera, F. De Aragón, E. Ascasíbar, A. Baciero, R. Balbín, **E. Blanco**, et al.

*“First experiments in NBI Heated Plasmas in the TJ-II stellarator”*

Proc. 31st European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, London (2004)

**E. Blanco**, S.Heuraux, T.Estrada, J. Sánchez and L. Cupido.

*“2D full-wave code for reflectometry simulations in TJ-II”*

Rev. Sci. Instrum **75** (2004) 3822-3824

C. Hidalgo, C. Alejaldre, A. Alonso, J. Alonso, L. Almoguera, F. De Aragón, E. Ascasíbar, A. Baciero, R. Balbín, **E. Blanco**, et al.

*“Overview of TJ-II experiments”*

Nucl. Fusion **45** (2005) S266-S275.

T. Estrada, **E. Blanco**, L. Cupido, M. Manso, J. Sánchez.

*“Fluctuation measurements in TJ-II using a broadband fast frequency hopping reflectometer”*

Proc. 7th International Reflectometry Workshop, IPP Report 2/9, p119, Garching (2005)

**E. Blanco**, T. Estrada, S. Heuraux, and J. Sánchez.

*“Doppler reflectometry studies using a two dimensional full-wave code”*

Proc. 7th International Reflectometry Workshop, IPP Report 2/9, p49, Garching (2005)

E. Holzhauser, and **E. Blanco**.

*“Remarks on the asymmetry of the angular response in x-mode reflectometry observed in numerical simulations”*

Proc. 7th International Reflectometry Workshop, IPP Report 2/9, p45, Garching (2005)

**E. Blanco**, T. Estrada, S. Heuraux and J. Sánchez

*“Study of Doppler reflectometry viability in TJ-II stellarator using a two-dimensional full-wave code”*

Proc. 32nd European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Tarragona (2005)

T. Estrada, **E. Blanco**, L. Cupido, M. E. Manso and J. Sánchez.

*“Fluctuation measurement by reflectometry in the stellarator TJ-II”*

Proc. 32nd European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Tarragona (2005)

**E. Blanco**, T. Estrada, L. Cupido, M. E. Manso, V. Zhuravlev and J. Sánchez.

*“Microwave reflectometry in TJ-II”*

15<sup>th</sup> International Stellarator TJ-II, Madrid (2005)

**E. Blanco**, T. Estrada, and J. Sánchez.

*“Doppler reflectometry studies using a two-dimensional full-wave code”*

Plasma. Phys. Control. Fusion **48** (2006). In press.

T. Estrada, **E. Blanco**, L. Cupido, M.E. Manso and J. Sánchez

*“Velocity shear layer measurements by reflectometry in TJ-II plasmas”*

Nucl. Fusion **46** (2006). In press.

E. Holzhauer, and **E. Blanco**.

*“A note on asymmetry effects in x-mode reflectometry”*

Nucl. Fusion **46** (2006). In press.

